

**UNIVERSITETET I OSLO**  
**Institutt for geofag MetOs**

**Volumtransport i  
Drøbaksundet og  
vannstandsendinger  
i indre Oslofjord**

Hovedoppgave i  
geofysikk

André Staalstrøm

4. mai 2005





# Forord

Hovedveileder for denne oppgaven har vært Eyvind Aas, og jeg vil takke for ideer og engasjert støtte gjennom hele prosessen.

Jan Magnusson og NIVA har trådt støttende til i forbindelse med feltarbeid. Uten dette ville ikke oppgaven ha blitt gjennomført. Jeg vil i denne forbindelse også takke Atle Lohrmann og Nortek AS for utlån av utstyr og fri tilgang til tidligere målinger i Drøbaksundet.

Jeg vil takke Bjørn Gjevik for hjelp med å sette opp regneskjema for simuleringsmodellen og for å bidra med data for bunntopografien til Oslofjorden, som jeg vet er et slit å skaffe til veie.

Mannskapet på “Trygve Braarud” med Sindre Holm i spissen, har vært til uvurdelig hjelp. Jeg har følt meg svært privilegert over å ha hatt et forskningsfartøy til rådighet. Jeg håper dette kan fortsette på denne måten også for andre studenter i framtida. “Trygve Braarud” gjør det attraktivt å studere oseanografi i Oslo.

Til sist vil jeg takke familien min. Mats for mange interessante spørsmål. Hilde for at du alltid er der, og jeg vil også nevne den økonomiske støtten du har bidratt med.

Oslo 1. april 2005  
André Staalstrøm



# Abstract

This thesis looks into features of the volume flux in the narrow Drøbak strait, and water level changes in the Inner Oslofjord. Earlier measurements (Endresen, 1995) suggest that the volum flux in the east course of the strait, calculated from one current profile at the deepest point of the sill, is only 50 % of the total volume flux in the strait, calculated from water level changes in the Inner Fjord. Because of the Drøbak Jetty it was expected that most of the volum flux would be in the east course of the strait. This result is confirmed by current measurments carried out in connection with this thesis.

Three different methods have been used to calculate the volum flux. The first is the method mentioned above, which uses one current profile measured by a bottom mounted acoustic current profiler.

The second method derivates the water level with respect to time and multiplies the derivative with the water area of the Inner Fjord. The water level was thoroughly examined by three different pressure sensors mounted at suitable positions, in addition to two sensors operated by Statens Kartverk (Oslo harbour and Oscarsborg). No great differences was found in phase or amplitude. The greatest difference in phase was between Oscarsborg and Oslo harbour (5 minutes). The lowest amplitude was at the Steilene station (94 % of the value at Oslo harbour). The water level was also examined by a numerical model with a resolution of 200 meters.

The third method uses direct current measurements from a vessel mounted current profiler (VMCP). The volume flux was calculated in two different sections, one in the east course right over the sill and one south of the sill covering the entire strait. Measurements from the first section gave a volume flux comparable with the results from the bottom-mounted current profiler, which was less than suggested by the equation of continuity. Measurements from the latter section gave a volume flux which was slightly greater than suggested by the equation of continuity.

Consequently this thesis offers no conclusive answer to the question about the volume flux, except that the estimates of the volume flux in the east course are too low and that the volume flux over the Drøbak Jetty is greater than previously assumed.



# Innhold

<b>1</b>	<b>Innledning</b>	<b>1</b>
1.1	Problemstilling . . . . .	1
1.2	Tidligere arbeid og motivasjon . . . . .	2
1.3	Indre Oslofjord . . . . .	2
1.4	Oppgavens struktur . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Beregningsmetoder</b>	<b>5</b>
2.1	Kontinuitetsligningen . . . . .	5
2.2	Anslag av $Q$ ved hjelp av bunnmontert AWAC . . . . .	6
2.2.1	Endresens algoritme . . . . .	6
2.2.2	Strømmens retning gjennom sundet . . . . .	8
2.2.3	Strøm i vestre løp . . . . .	8
2.3	Måling av $Q$ ved hjelp av VMCP . . . . .	9
2.3.1	Fartøysmontert AWAC . . . . .	9
2.3.2	Summering av strømkomponentene . . . . .	9
2.4	Anslag av $Q$ ved hjelp av vannstandsmålinger . . . . .	10
2.4.1	Numerisk derivasjon og midling . . . . .	10
2.4.2	Beregning av fjordareal og inndeling rundt målerne . . . . .	11
2.4.3	Vannstanden som en funksjon av vannstanden i Oslo havn . . . . .	12
2.5	Frekvensanalyse . . . . .	12
2.5.1	Harmonisk analyse . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Innsamling av data</b>	<b>15</b>
3.1	Feltdata . . . . .	15
3.2	Vannstandsmålinger . . . . .	15
3.2.1	Instrumentet . . . . .	15
3.2.2	Utplassering av vannstandsmålerne . . . . .	16
3.2.3	Instrumentenes nøyaktighet . . . . .	17
3.2.4	Måleusikkerhet . . . . .	18
3.3	Bunnmontert strømmåler . . . . .	19
3.3.1	Nortek AWAC . . . . .	19
3.3.2	Utplassering av instrumentet . . . . .	20
3.3.3	Måleusikkerhet . . . . .	21
3.3.4	Kystverkets bunnmonterte AWAC . . . . .	21
3.4	Fartøysmontert strømmåler . . . . .	22
3.4.1	Instrumentet . . . . .	22
3.4.2	Innsamling av data . . . . .	23
3.4.3	Kvalitetssikring av data . . . . .	23
3.4.4	Måleusikkerhet . . . . .	31
3.5	Modellsimulering . . . . .	32
3.5.1	Beskrivelse av modellen . . . . .	32
3.5.2	Numerisk implementering . . . . .	34
3.5.3	Kjøring av modellen . . . . .	34

<b>4 Resultater</b>	<b>37</b>
4.1 Volumtransport . . . . .	37
4.1.1 Strømmålinger fra bunnmontert AWAC . . . . .	37
4.1.2 Vannstandsmålinger . . . . .	41
4.1.3 Beregninger av volumtransporten . . . . .	42
4.1.4 Strømmålinger fra fartøysmontert AWAC . . . . .	44
4.2 Resultater fra frekvensanalysen . . . . .	46
4.2.1 Vannstandsmålinger . . . . .	46
4.3 Resultat fra modellsimuleringa . . . . .	48
4.3.1 Vannstanden inni fjorden . . . . .	48
4.3.2 Volumtransporten . . . . .	48
4.4 Detaljer i målingene . . . . .	49
4.4.1 Strømmens lagdeling . . . . .	49
4.4.2 Virveldannelse . . . . .	50
<b>5 Analyse</b>	<b>51</b>
5.1 Formulering av hovedproblemet . . . . .	51
5.2 Vi går kontinuitetsligningen etter i sømmene . . . . .	53
5.2.1 Et regneeksempel . . . . .	53
5.2.2 De styrende kreftene . . . . .	55
5.2.3 Hvordan endres vannstanden inni fjorden? . . . . .	56
5.2.4 Hvilke frekvenser gir bassengets geometri? . . . . .	60
5.3 Transporten i Drøbaksundet . . . . .	61
5.3.1 Forholdet mellom den reelle og den profilbaserte trans- porten . . . . .	61
5.3.2 Hva sier VMCP-målingene? . . . . .	61
5.3.3 Diskusjon . . . . .	62
<b>6 Konklusjon</b>	<b>65</b>
<b>A Symboler</b>	<b>67</b>
<b>B Frekvensspektra</b>	<b>71</b>
B.1 Fourier analyse. . . . .	71
B.2 Vannstandsmålinger . . . . .	72
B.3 Strømmålinger. . . . .	72
<b>C Måledata</b>	<b>75</b>
C.1 Strømmålinger i Drøbaksundet . . . . .	75
<b>D Vannstands- og volumfluksatlas</b>	<b>81</b>
D.1 Resultater fra den numeriske modellen . . . . .	81
<b>Bibliografi</b>	<b>110</b>



# Kapittel 1

## Innledning

### 1.1 Problemstilling

I 1992 gjorde Endresen (1995) omfattende strømmålinger i Drøbaksundet. Strømmen ble målt kontinuerlig i 9 vertikale profiler i det østlige løp, og 3 vertikale profiler i det vestlige løp. Hovedhensikten var å sammenligne forskjellige forenklede metoder for å beregne volumtransport i sundet. Det beste estimatet ble oppnådd med den algoritmen som er beskrevet i kapittel 2.2.1.

Volumtransporten inn og ut av Drøbaksundet er en funksjon av vannstanden i Indre Oslofjord og omvendt. Endresen beregnet volumtransporten utifra strømmålinger, og sammenliknet dette med transporten beregnet fra vannstandsendringer i Indre Fjord. Han fant ut at vannstandsendringene ga et resultat som var opp til 100 % større enn resultatet fra strømmålingene.

På oppdrag fra Kystverket foretok Nortek AS i 2001 og 2002 de hittils lengste tidsseriene av strømmålinger til da. Disse dataene er ikke tidligere publisert. En akustisk doppler strømmåler ble etter anbefalinger av NIVA plassert på terskelens dypeste punkt, og målte strømmen i hver meter langs en vertikal over punktet.

Resultatene som Endresen kom fram til strider mot kontinuitetsligningen (ligning 2.3 på side 6). Med de nye målingene fra Nortek ble det mulig å teste kontinuitetsligningen mer omfattende enn tidligere.

Denne oppgaven skal se på kontinuitetsligningen anvendt på Indre Fjord innenfor Drøbaksundet. Hovedspørsmålet som blir stilt, er hvorfor den deriverte av vannstanden gir større volumtransport enn direkte strømmålinger, og om dette kan skyldes forskjeller i amplitude eller fase til vannstanden i Indre Fjord. Undersøkelsene skal omfatte egne vannstandsmålinger og strømmålinger, samt kjøring av en numerisk modell. Vi skal komme inn på forskjellige fysiske forhold:

- Hvordan endres vannstanden rundt i Indre Fjord?
- Hvilke frekvenser finnes i felldataene, og kan disse forklares utifra bassengets geometri?
- Finnes periodene for eventuelle tidevannsinduserte indre bølger igjen i felldataene?
- Hvordan påvirker terskelens topografi strømmen?

## 1.2 Tidligere arbeid og motivasjon

Mye arbeid er blitt lagt ned for å forstå forskjellige forhold i Oslofjorden. Når det gjelder strømforholdene, så begynte man å undersøke dette noenlunde systematisk for over 100 år siden. I følge Johannesen (1963) ble den første store undersøkelsen gjort i årene 1896 og 1898 av Hjort og Gran. Blant andre Guldberg (1873) hadde gjort sporadiske undersøkelser før dette. Opp gjennom årene ble det gjort en del undersøkelser; Gran og Gaarder (1918), Braarud og Ruud (1937) og Johansen (1959). Mye av dette stoffet omhandler vindens påvirkning på strømmen.

De første strømmålingene i forskjellige dyp over et lengre tidsrom, gjorde Gade (1963a). Johannesen (1963) målte kontinuerlig i Drøbaksundet 14 dager i juni 1963. Tryggestad (1974) gjorde en undersøkelse av strømmen sør i Drøbaksundet og tidevannet i Oslofjorden. Han målte i tre forskjellige dyp. Jensen (1977) målte strømmen i Drøbaksundet i juni/juli 1972. Som nevnt tidligere målte Endresen strømmen i Drøbaksundet i 1992, og Nortek målte flere lengre tidsserier i 2001 og 2002.

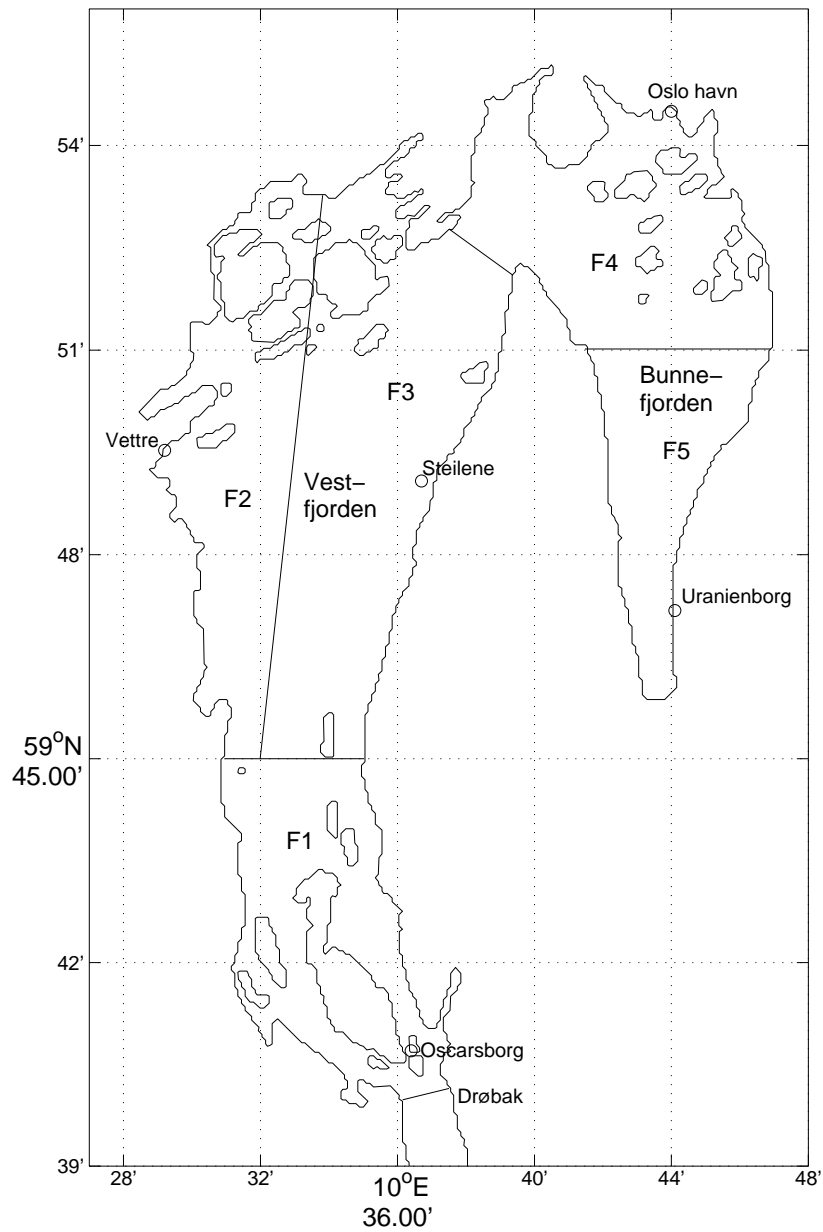
Strømmen i Drøbaksundet er først og fremst viktig for skipstrafikken, men også for forskning på vannmassenes bevegelse inni fjorden og for dannelselse av indre bølger som igjen har betydning for blandinga i fjorden. Det er svært nyttig å kunne forutsi strømmen på en god måte utifra vannstandsmålinger, som er kontinuerlige og ikke minst, tilgjengelige for allmenheten. Meteorologisk institutt utfører varsler av vannstand (<http://met.no/cgi-bin/vannstand-tabell.cgi>). Observerte vannstand kan hentes ned fra Statens Kartverk sine hjemmesider for de tre siste åra (<http://vannstand.statkart.no>).

## 1.3 Indre Oslofjord

Oslofjorden strekker seg fra Færder fyr i Skagerrak til Oslo by. Fjorden er hovedsakelig delt opp i to hoveddeler, som blir kalt Ytre og Indre Oslofjord. Det ytre bassenget er skilt fra Skagerrak av en terskel på omtrent 120 m (Gade, 1963b). Skillet mellom Indre og Ytre Fjord går ved terskelen helt nord i Drøbaksundet. Terskeldypet er her 21 m. Herfra strekker fjorden seg til Oslo havn og videre innover Bunnefjorden til Oppegård. Figur 1.1 viser et kart over det aktuelle området.

Tverrsnittarealet i Drøbaksundet er  $10480 \text{ m}^2$  (Endresen, 1995) og, arealet av fjorden innenfor terskelen er  $188,4 \cdot 10^6 \text{ m}^2$  (beregnet av undertegnede, se tabell 2.2 på side 11). Volumet av vannet innenfor terskelen, er  $9288 \cdot 10^6 \text{ m}^3$  (Gade, 1963a), som gir et middeldyp på 49,3 m. Det maksimale dypet er 150 m i Vestfjorden og 157 m i Bunnefjorden.

I denne oppgaven skal vi behandle den indre delen av fjorden. Avstanden i nord-sørretning fra Drøbak til det nordligste punktet innerst i Bestumkilen, er 28,3 km lang. Dypvannslinja, som linja som finnes ved å følge det dypeste dypet fra Drøbak til innerst i Bunnefjorden kan kalles, er 51,3 km lang. Dypvannslinja fra Drøbak til Bestumkilen er 30,5 km lang.



Figur 1.1: Kart over Indre Oslofjord. Stasjonene for vannstandsmålinger er tegnet inn. Fjorden er delt inn i fem områder rundt hver målestasjon. Kystkonturen er hentet fra <http://rimmer.ngdc.noaa.gov/mgg/coast/getcoast.html>.

## 1.4 Oppgavens struktur

Vi begynner i kapittel 2 med å beskrive de forskjellige beregningsmetodene som har blitt brukt i oppgaven. I kapittel 3 tar vi for oss prosessen med innsamling av data. Den numeriske simuleringsmodellen som er brukt i denne oppgaven, blir beskrevet i dette kapitlet. I kapittel 4 ser vi på hvilke data som er samlet inn, og hva resultatet blir etter at de har blitt behandlet med beregningsmetodene beskrevet i kapittel 2. I kapittel 5 blir resultatet analysert, og vi skal drøfte spørsmålene som vi har stilt i problemstillingen.

## Kapittel 2

# Beregningsmetoder

### 2.1 Kontinuitetsligningen

Vannet som strømmer inn og ut Drøbaksundet må resultere i vannstandsendinger i Indre Oslofjord. Vi kan sette opp kontinuitetsligningen, hvor volumet skal være bevart.

$$F \frac{dh}{dt} = Q + R + P - E, \quad (2.1)$$

hvor

$F$  er arealet av fjorden innenfor Drøbaksterskelen,

$h$  er den midlede vannstanden innenfor terskelen,

$t$  er tiden,

$Q$  er volumtransport i Drøbaksundet (positiv innover),

$R$  er volumtransport fra elvene,

$P$  er nedbør og

$E$  er fordampning.

I følge Wold (2002) var vannføringa for elvene i Oslo i snitt gjennom året  $19,2 \text{ m}^3/\text{s}$  i 2000,  $11,2 \text{ m}^3/\text{s}$  i 2001 og  $8,4 \text{ m}^3/\text{s}$  i 2002. Lysakerelva, Mærdalsbekken, Hoffselva, Frognerelva, Akerselva, Hovinbekken, Alna og Ljanselva er tatt med i dette regnskapet. De andre elvene lenger sør i fjorden, hvor Åroselva og Sandvikselva er de mest betydningsfulle, er utelatt.

I den siste perioden hvor strømmåleren i Drøbaksundet var utplassert, januar 2004, ble det på Blindern målt  $109 \text{ mm}$  nedbør. Hvis vi antar at dette representerer hele Indre Fjord, kan vi anslå nedbørsleddet i (2.1) til  $8 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Hvis man anvender en formel fra Dingman (1993), for beregning av fordampning fra innsjøer på Indre Oslofjord, kan fordampningsleddet i (2.1) anslås. Fordampningen øker hvis differansen mellom vanntemperaturen og lufttemperaturen øker. Økt vindhastighet og nedgang i luftfuktighet øker også fordampningen. Den tørreste og mest forblåste dagen i januar 2004 var den 19. Middelvinden var  $5,5 \text{ m/s}$ , luftfuktigheten  $77 \%$ , lufttemperaturen  $-4,8 \text{ }^\circ\text{C}$  og vanntemperaturen  $3,5 \text{ }^\circ\text{C}$ . Dette ga en fordampning på  $0,32 \text{ mm/dag}$ . Fordelt utover hele fjordarealet gir dette en fordampning på omtrent  $0,7 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Elvetilførsel, nedbør og fordampning blir altså ikke større enn  $30 \text{ m}^3/\text{s}$ . Amplituden til volumtransporten i sundet når vannet flør eller ebber, er av størrelsesorden  $10^3 \text{ m}^3/\text{s}$ , og for vårt problem kan vi derfor se bort i fra de øvrige leddene ( $R + P - E$ ).

Drøbaksundet har to løp, et på hver side av Småskjær (figur 3.4 på side 24). Volumtransporten i det østlige løp kaller vi  $Q_E$ , og i det vestlige  $Q_W$ . Vi kan da skrive

$$Q = Q_E + Q_W. \quad (2.2)$$

Kontinuitetsligningen kan nå skrives

$$F \frac{dh}{dt} = Q_E + Q_W. \quad (2.3)$$

## 2.2 Anslag av $Q$ ved hjelp av bunnmontert AWAC

Målere som måler strømmen i en profil gjennom vannsøylen ved bruk av akustikk og dopplerprinsippet, kalles ADCP (Acoustic Doppler Current Profiler). Men siden denne betegnelsen er patentert, er betegnelsen AWAC (Acoustic Wave And Current profiler) brukt av fabrikanten Nortek.

### 2.2.1 Endresens algoritme

I sin hovedoppgave (1995) testet Øyvind Endresen forskjellige forenklede metoder for å beregne volumtransporten i Drøbaksundet. Først ble volumtransporten  $Q_E$  målt med ni strømprofiler på tvers av det østre løp (figur 2.1). Deretter ble transporten beregnet utifra kun den dypeste strømprofilen som beskrevet nedenfor. Den verdien man da kom fram til, kan vi kalle den profilbaserte transporten,  $Q^p$ . Dette ble gjort en rekke ganger, og så ble  $Q_E$  og  $Q^p$  korrelert.

For å beregne den profilbaserte transporten, ble den målte strømmen  $v_i$ , i dypet  $z_i$ , multiplisert med delarealet  $A_i$ , i det samme dypet. Delareal vil si arealet en halv meter over og under  $z_i$  og ut til sidene. Tabell 2.1 viser tallverdiene av delarealene som Endresen brukte.

Produktet av areal og strøm i hvert dyp, ble summert fra overflata til bunn.

$$Q^p = \sum_{k=1}^{21} v_k A_k \quad (2.4)$$

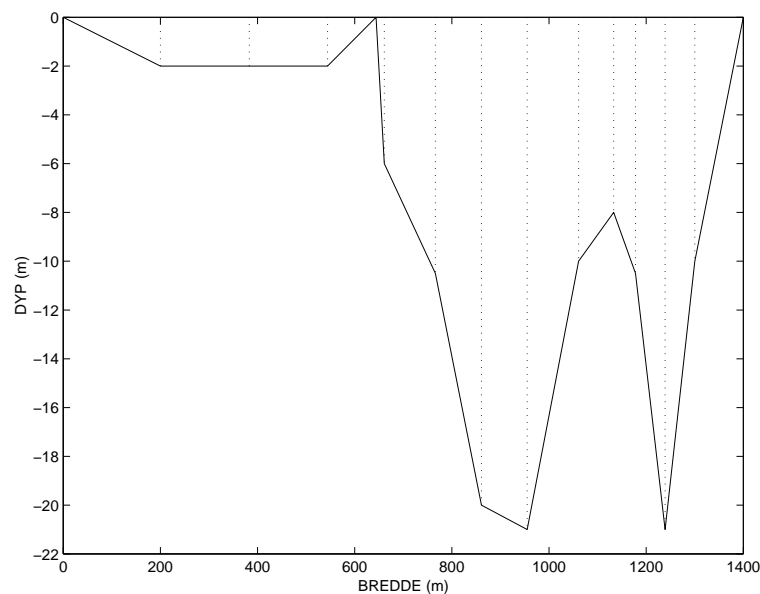
Ligning (2.5) viser korrelasjonsformelen som Endresen kom fram til.

$$Q_E = \alpha Q^p + \beta. \quad (2.5)$$

Denne formelen gir et anslag for  $Q$  med en nøyaktighet på 20% hvis man setter  $\alpha = 0,67$  og  $\beta = 73 \text{ m}^3/\text{s}$  (Endresen, 1995).

i	Dyp(m)	Areal( $m^2$ )	Areal( $m^2$ )
1	0-1	686,7	788,5
2	1-2	680,0	777,4
3	2-3	673,3	766,35
4	3-4	666,7	755,3
5	4-5	660,0	744,3
6	5-6	653,3	733,25
7	6-7	592,5	707,6
8	7-8	577,5	662,6
9	8-9	502,2	599,4
10	9-10	466,3	525,3
11	10-11	345,2	453,65
12	11-12	248,7	383,9
13	12-13	232,55	329,25
14	13-14	216,0	294,45
15	14-15	199,9	259,7
16	15-16	184,0	193,15
17	16-17	167,9	119,25
18	17-18	151,7	69,8
19	18-19	135,5	22,3
20	19-20	119,3	8,5
21	20-21	30,65	0
	totalt	8189,9	9193,95

Tabell 2.1: Tverrsnittsarealet i det østre løp etter Endresen (1995) (tredje kolonne), og beregnet fra topografisk kart hvor det minste terskeldypet er projekttert på en linje som er dreid  $11^\circ$  mot klokka i forhold til øst-vestlinja (fjerde kolonne).



Figur 2.1: Tverrsnitt av sundet.

### 2.2.2 Strømmens retning gjennom sundet

I metoden skissert over ble transporten beregnet ut fra nord-sørkomponenten av hastigheten i et tverrsnitt i retning øst-vest. Strømmen ble målt langs terskelens grunneste punkter, det vil si at terskelryggen ble fulgt på tvers av sundet. De forskjellige måleposisjonene ble projisert på en linje i øst-vestretning.

Hvis den østgående komponenten er betydelig slik at hovedretningen av strømmen ikke er rett nord-sør, må tverrsnittet dreies en vinkel  $\gamma$ . Arealet blir da større siden måleposisjonene langs terskelen ble projisert rett nord/sør.

$$A_\gamma = \frac{A}{\cos \gamma} \quad (2.6)$$

Stømkomponentene må da dekomponeres i den nye hovedretningen. Vi legger origo i overflata rett over terskelens dypeste punkt.  $z$ -aksen peker oppover,  $x$ -aksen på tvers av sundet i østlig retning og  $y$ -aksen nordover inn fjorden. Koordinatsystemet kan roteres om origo en vinkel  $\gamma$ . Vi lar  $u$  og  $v$  betegne strømkomponentene i henholdsvis  $x$ - og  $y$ -retning når  $\gamma = 0^\circ$ .  $u_\gamma$  og  $v_\gamma$  betegner strømkomponentene i henholdsvis  $x_\gamma$ - og  $y_\gamma$ -retning når koordinatsystemet er rotert en vinkel  $\gamma$ . Vi får da

$$u_\gamma = u \cos \gamma + v \sin \gamma \quad (2.7)$$

og

$$v_\gamma = v \cos \gamma - u \sin \gamma \quad (2.8)$$

### 2.2.3 Strøm i vestre løp

Vi har nå et anslag for volumtransporten i det østlige løp. Men hvor stor er den i det vestre?

Tverrsnittarealet i det østre løp er  $8190 \text{ m}^2$ , og i det vestre er det  $966 \text{ m}^2$  (Endresen, 1995). Arealet i det vestre løp er altså 11.8 % av arealet i det østre løp. Antar vi at strømmen over terskelen er omtrent like høy nær bunnen i forhold til i overflata, kan en strømhastighet midlet over tverrsnittarealet gi et godt bilde av strømmen. Hvis vi antar at strømhastigheten midlet over tverrsnittarealet i det vestre løp ikke blir større enn dobbelt så stor som hastigheten midlet over tverrsnittarealet i det østre løp, kan vi si at  $Q_W$  ikke blir større enn 23.6% av  $Q_E$ . Om disse antagelsene stemmer må man se utifra strømmålinger.

For å få et anslag av  $Q_W$  over tid, kan vi ta utgangspunkt i ligning (2.2). Kan vi anslå  $Q$  ved noen tidspunkter, så finner vi størrelsen av  $Q_W$  ved å trekke fra  $Q_E$ .



## 2.3 Måling av $Q$ ved hjelp av VMCP

### 2.3.1 Fartøysmontert AWAC

Ved å montere en AWAC som ser nedover på et fartøy, kan strømmen under kjølen og nedover i dypet måles. Norteks fartøysmonterte AWAC har fått betegnelsen VMCP, som står for Vessel Mounted Current Profiler. Fartøyet's fart over grunnen blir målt med differensiell GPS (Navstar Global Positioning System), og kursen med et gyrokompass. Denne fartsvektoren blir trukket fra den målte strømmen, og vannets hastighet over grunnen blir beregnet i en vertikal profil under fartøyet. Ved å seile fartøyet i rolig fart og med stø kurs på tvers av et sund, kan volumtransporten i sundet beregnes. En nærmere gjennomgang av instrumentet kommer i kapittel 3.

### 2.3.2 Summering av strømkomponentene

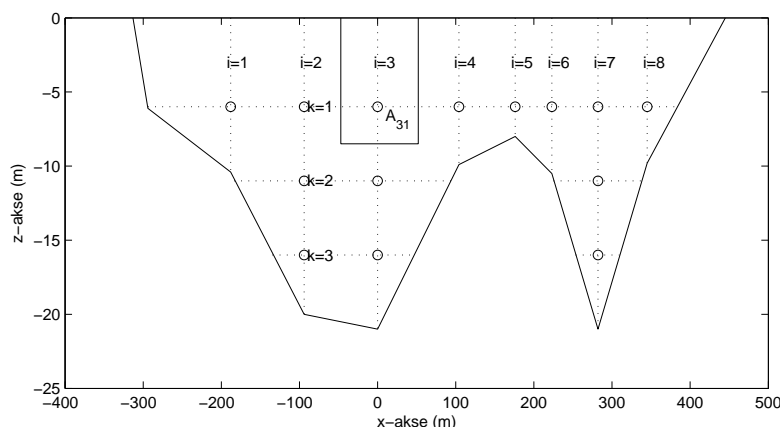
Som eksempel ser vi på et sund. Vi legger koordinatsystemet som ble definert i 2.2.2, i sundet. Koordinatsystemet blir rotert slik at  $y$ -aksen ligger i sundets lengderetning. Strømkomponenten  $v(x_i, z_k) = v_{ik}$ , blir målt i punktene  $(x_i, z_k)$ . For å finne volumtransporten multipliseres strømkomponentene med delarealene.

$$Q = \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K v_{ik} A_{ik} \quad (2.9)$$

Figur 2.2 viser en skisse av et sund. Vi ser at vi må ta hensyn til bunnen når vi summerer. Siden den vertikale posisjonen til strømmålingene er bestemt utifra hvor lang tid det akustiske signalet bruker i vannet, vil en del strømverdier bli målt tilsynelatende under bunnen. Disse er ikke reelle og må settes lik null. Vi må først summere fra overflata til bunnen, og så langs  $x$ -aksen.

Siden den første strømmålingen er et godt stykke fra overflata, må vi anslå en verdi for strømmen nær overflata. Dette gjøres ved benytte målingene fra den bunnmonterte strømmåleren. Strømmen i en meters dyp korreleres med strømmen lenger ned. På denne måten kan strømmen i overflata anslås utifra strømmen i for eksempel 5 eller 8 meters dyp. Korrelasjonsfaktoren mellom strømverdiene sier noe om kvaliteten til anslaget. Ved bunnen settes strømmen lik null.

Siden vi ikke kunne styre Trygve Braarud på land, mangler data fra nær sundets bredder. For å få et anslag for volumtransporten i disse delarealene, brukes strømprofilen nærmest bredden, og strømmen ekstrapoleres lineært inn til bredden hvor det antas at strømmen er null. For å få et anslag for den maksimale transporten i sidearealene, lar vi også strømprofilen nærmest strandlinja representere strømmen i hele delarealet.



Figur 2.2: Tverrsnittet av et sund. Vi ser innover i fjorden. Origo ligger i punktet  $(0,0)$ .  $x$ -aksen peker til høyre.  $y$ -aksen peker innover i figuren.  $z$ -aksen peker oppover. Ringene angir målepunktene. Arealet for  $i = 3$  og  $k = 1$  er tegnet inn. Sidearealene befinner seg til venstre for  $i = 1$  og til høyre for  $i = 8$ .

## 2.4 Anslag av $Q$ ved hjelp av vannstandsmålinger

### 2.4.1 Numerisk derivasjon og midling

Vi skal nå anslå transporten i Drøbaksundet utifra vannstandsmålinger i Indre Oslofjord. Til dette skal kontinuitetsligningen (2.3) brukes. Som en første tilnærming antar vi at vannstanden er lik over hele fjordarealet.

Den tidsderivate til vannstanden,  $dh/dt$ , må anslås. Til det bruker vi en sentrert endelig differansetilnærming

$$[h_t]^n = \left[ \frac{dh}{dt} \right]^n = \frac{h^{n+1} - h^{n-1}}{2\Delta t}, n = 2, 3, 4 \dots N - 1. \quad (2.10)$$

$n$  angir et element i en tidsserie med  $N$  elementer. Hvis tidserien starter ved tidspunktet  $t_1$ , så er  $t^n = t_1 + (n - 1)\Delta t$ , hvor tiden måles i sekunder. Vannstanden er  $h(t^n) = h^n$ . Som vi ser så mister vi en måling i hver ende av tidsserien. Vannstandsdataene som har blitt hentet inn fra Statens Kartverk, har et måleintervall på 10 minutter. Dette gir en  $\Delta t$  på 600 sekunder. Oppløsningen er på 1 cm. Denne nøyaktigheten gir hakkete data, og for å jevne ut kurven, brukes et glidende middel.

$$\overline{[h_t]^n} = \frac{1}{5} \sum_{i=n-2}^{n+2} [h_t]^i. \quad (2.11)$$

Det midles her over 40 minutter, og vi mister nå enda 2 målinger på hver side av tidsserien. Dette er ikke noe stort problem, siden vi mister kun en halv time på hver side av måleserien, som for dataene fra Statens Kartverk, er lengre enn strømmålingene.

Stasjon	m	N	E	Betegnelse	$10^6 m^2$
Oscarsborg	1	$59^\circ 40, 7'$	$10^\circ 36, 4'$	$F_1$	30,3
Vettre	2	$59^\circ 49, 5'$	$10^\circ 29, 2'$	$F_2$	33,3
Steilene	3	$59^\circ 49, 1'$	$10^\circ 36, 7'$	$F_3$	59,5
Oslo havn	4	$59^\circ 54, 5'$	$10^\circ 44, 0'$	$F_4$	38,8
Uranienborg	5	$59^\circ 47, 2'$	$10^\circ 44, 1'$	$F_5$	26,5
Totalt				$F$	188,4

Tabell 2.2: *Inndeling av fjorden i delarealer. Måleren i Oslo havn er plassert ved Bjørvikutstikkeren i Bjørvika. Måleren ved Oscarsborg er plassert på østsiden av Kaholmen. Datumet som er brukt er WGS84.*

Er det forskjeller i vannstanden innenfor terskelen? Fra tidevannstabellen vet vi at størrelsen på høyvannet i Oscarsborg er 5% mindre enn i Oslo havn, og det inntreffer fire minutter før.

For å undersøke dette nærmere, ble vannstanden målt på tre utvalgte steder innenfor terskelen. Stedene ble valgt utifra tilgjengelighet, og de ble mest mulig spredd utover. De forskjellige stasjonene var Vettre, Steilene og Uranienborg (figur 1.1 på side 3).

### 2.4.2 Beregning av fjordareal og inndeling rundt målerne

Fjordarealet som inngår i formel (2.3) har blitt beregnet til  $F = 193 \cdot 10^6 m^2$ , Munthe-Kaas (1968).

Fjordarealet ble beregnet på nytt ved hjelp av kartdata hentet fra NVE sitt interaktive kart, ([www.nve.no](http://www.nve.no)). Alt hav ble fargelagt svart, og alt land ble fargelagt hvitt. Programmet Imagine ble brukt for å telle antall hvite og svarte piksler i bildet. Arealet til hele bildet ble beregnet utifra de geografiske koordinatene til hjørnepunktene. Forholdet mellom svarte og hvite piksler, tilsvarer forholdet mellom hav og land, og fjordarealet kunne nå beregnes. Resultatet sees i tabell 2.2.

For å dele inn fjordarealet rundt vannstandsmålerne, ble rette linjer trukket mellom målepunktene. Grenselinja mellom delarealene ble tegnet vinkelrett gjennom midtpunktet til denne linja. Figur 1.1 på side 3 viser oppdelingen.

Kontinuitetsligningen (2.3) kan nå modifiseres

$$\sum_{m=1}^5 F_m \frac{dh_m}{dt} = Q_E + Q_W. \quad (2.12)$$

### 2.4.3 Vannstanden som en funksjon av vannstanden i Oslo havn

For å bruke den modifiserte kontinuitetsligningen, må vi ha  $h_m$  for samme periode som strømmålingene. Vannstanden i Oslo havn og ved Oscarsborg måles kontinuerlig. For de andre stasjonene fins kun begrensede tidsserier, og disse er ikke samtidige med strømmålingene. Men utifra de måleseriene som fins, kan vannstanden ved de forskjellige stasjonene uttrykkes som en funksjon av vannstanden i Oslo havn.

Faseforskjellen er framkommet ved at tidsseriene har blitt forskjøvet i forhold til hverandre, og deretter har korrelasjonsfaktoren blitt beregnet. Den forskyvningen som gir best korrelasjon antas å angi riktig faseforskyvning. Siden tidsskrittet i tidsseriene er på 10 minutter, har interpolasjon blitt brukt for å komme fram til mer nøyaktig faseforskyvning.

Etter at faseforskyvning er foretatt, brukes minste kvadraters metode for å beregne vannstanden ved de forskjellige stasjonene i Indre Oslofjord som en funksjon av vannstanden i Oslo havn. Denne funksjonen har formen

$$h_m = a + bh_4 \quad (2.13)$$

hvor  $h_4$  er vannstanden i Oslo havn, og  $h_m$  vannstanden ved stasjon  $m$ . Tabell 4.1 på side 42 viser resultatene.

## 2.5 Frekvensanalyse

For å undersøke hvilke frekvenser som er typiske for de innsamlede feltdataene, foretas en frekvensanalyse. Det består i å beregne et frekvensspekter, hvor energien er plottet som en funksjon av frekvensen. Vi kan da se på hvilke frekvenser det er mye energi.

### 2.5.1 Harmonisk analyse

For å finne energien på nøyaktig frekvensene til  $M_2$ ,  $S_2$  og så videre, brukes harmonisk analyse. Man antar da at tidevannet er deterministisk. Tidevannskrafta kan modelleres som en sum av et begrenset antall sinusledd med spesifisert frekvens og fase. Altså kan tidevannskrafta presenteres som stolper i frekvensspekteret.

Det er utarbeidet en utmerket programpakke for Matlab, som gjør harmonisk analyse veldig enkelt. Programpakken kalles T\_TIDE, og er utarbeidet av Pawlowicz (2002) med flere.

Ved harmonisk analyse av en tidsserie beregnes amplituden,  $a_m$ , og fasevinkelen,  $\phi_m$ , for en del utvalgte tidevannskomponenter, hvor  $m$  er en indeks for de forskjellige komponentene. Det antas at verdien i tidsserien,  $h$ , kan skrives som en sum.

	Periode (timer)	Frekvens ( $^{\circ}/minutt$ )	Frekvens ( $10^{-4}rad/sekund$ )
$MSf$	354,24	0,0169314	0,0492514
$O_1$	25,82	0,2323842	0,6759782
$K_1$	23,93	0,2506842	0,7292108
$M_2$	12,42	0,4830684	1,4051890
$S_2$	12,00	0,5000000	1,4544410
$M_4$	6,21	0,9661368	2,8103780
$2MK_5$	4,93	1,2506844	3,6380934
$M_6$	4,14	1,4492052	4,2155670
$2MS_6$	4,09	1,4661366	4,2648185
$3MK_7$	3,53	1,6998894	4,9447778
$M_8$	3,11	1,9322736	5,6207561

Tabell 2.3: De aktuelle tidevannskomponentene med frekvens og periode.

$$h = \sum_m a_m \sin(\omega_m t - \phi_m) \quad (2.14)$$

Frekvensen  $\omega_m$  er kjent.

Programpakken T\_TIDE beregner foruten amplitude og fasevinkel, også et 95 % feilestimat for hver av verdiene. Sannsynligheten for at den beregnede verdien er innefor feilgrensene er altså 95 %. Dette gjøres ved å beregne et frekvensspekter etter at tidevannskomponentene er fjernet. Den energien man da sitter igjen med rundt frekvensen til hver av tidevannskomponentene, kan tolkes som et støynivå.

De aktuelle tidevannskomponentene er å finne i tabell 2.3. I den harmoniske analysen blir en komponent regnet som signifikant hvis forholdet mellom signal og støy er høyt.



## Kapittel 3

# Innsamling av data

### 3.1 Feltdata

De feltdataene vi sitter med er følgende:

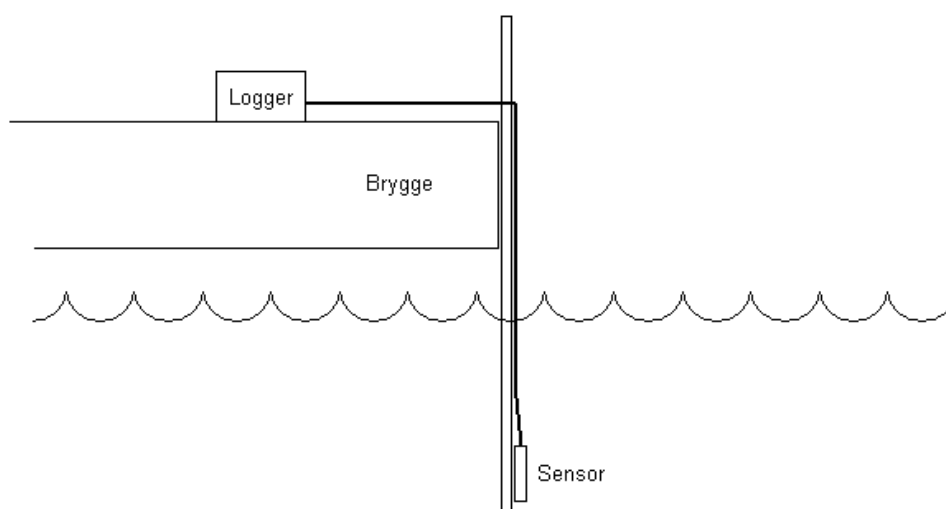
- CTD-målinger fra terskelen
- strømmålinger fra to forskjellige AWAC plassert på Drøbacterskelen
- vannstandsmålinger for Oslo havn og Oscarsborg innhentet fra Statens kartverk
- vannstandsmålinger for Uranienborg, Steilene og Vettre
- strømmålinger fra fartøysmontert AWAC
- atmosfærisk trykk for Blindern innhentet fra Meteorologisk institutt

Det er kun målingene som er innhentet fra Statens kartverk og Meteorologisk institutt som er kontinuerlige. De andre dataene er naturlig nok begrenset i tid, og de er ikke alle samtidige.

### 3.2 Vannstandsmålinger

#### 3.2.1 Instrumentet

Til måling av vannstand, ble det brukt Drük trykksensorer med tilhørende loggingsenheter av typen Newlog. Fire slike trykksensorer ble utlånt av NI-VA. Trykksensoren plasseres i vannet. Det er viktig at sensoren blir plassert tilstrekkelig dypt, slik at måleren ikke på noe tidspunkt bli tørrlagt. En meter eller mer under overflata er en bra posisjon. Loggingsenheten plasseres på land, mest mulig skjermet mot vind og bølger og eventuelle vandaler. Det beste er om loggingsenheten kan være innelåst. Plasseringen begrenser seg av lengden på kabelen mellom sensoren og loggingsenheten. Lengden på kabelen var 10 meter. Figur 3.1 viser en typisk rigging av instrumentet.



Figur 3.1: Skisse av opphenget til vannstandsmålerne.

### 3.2.2 Utplassering av vannstandsmålerne

I den andre helga i advent i 2003 ble det utplassert fire vannstandsmålere i Indre Oslofjord. På fredag den 5. desember ble det først plassert ut en måler på Ljans vels brygge like ved Katten. Tillatelse ble innhentet fra Petter Walby, som representerer Ljans vel. Sensoren ble festet til en planke, som igjen ble festet til en fast brygge. Loggeren ble pakket inn i svarte søppelsekker og plassert under brygga. Sensorens vertikale plassering ble oppmålt med en tommestokk. Dette ble sammenliknet med verdien fra sensoren når den sto i vannet, for å teste sensorens absolutte nøyaktighet. Den relative nøyaktigheten ble testet i slutten av oktober i Drøbak.

Seinere på fredagen ble det med assistanse fra kjentmann Reidar Solberg utplassert en nivåmåler på Svartskogstranda, like sør for Roald Amundsens hjem. Sensoren ble plassert på et forholdsvis skjermet sted, men tydeligvis ikke skjermet nok, for i løpet av kvelden ble den tatt av været. Loggingsenheten ble funnet igjen, ved god hjelp av dykkergruppa fra Sollerudstranda skole, på en strand 50 meter lenger sør.

Måleren ved Ljans vels brygge ble også tatt av bølgene. Dette skjedde en gang mellom 13. og 22. desember.

Lørdag 6. desember ble måler nummer tre utplassert på Vette i Asker. Min onkel, Tom Staalstrøm, har en egnet brygge der. Denne måleren sto trygt helt til den ble tatt inn 22. desember.

Søndag 7. desember ble måler nummer fire utplassert på Steilene. Jon Willy Løkkevik fra Nesodden Seilforening var behjelpelig med dette. Denne måleren tok vi opp 13. desember, og plasserte den ut igjen tirsdag 16. desember på Uranienborg ved Svartskog (Roald Amundsens hjem). Måleren ble hentet inn 21. desember.



Stasjon	Fra	Til
AWAC	8. jan 04	27. jan 04
Oscarsborg	1. des 03	27. jan 04
Vettre	6. des 03	22. des 03
Steilene	7. des 03	13. des 03
Oslo havn	1. des 03	27. jan 04
Uranienborg 1	16. des 03	21. des 03
Uranienborg 2	7. jan 04	22. jan 04

Tabell 3.1: Måleperiodene til vannstandsmålingene og den bunnmonterte AWAC-måleren. Uranienborg 1 og 2 er samme posisjon.

Sted	Bredde	Lengde	Tommestokk	Input
Vettre	N 59° 49, 53'	E 10° 29, 2'	88,5 cm	85,5 cm
Steilene	N 59° 49, 08'	E 10° 36, 7'	74,5 cm	75,5 cm

Tabell 3.2: Absolutt nøyaktighet. Ved Uranienborg ble sensoren festet til en stein og lagt på bunnen. Steinens dybde ble ikke målt opp med tommestokk. Posisjonene er oppgitt i WGS84.

En ny vannstandsmåler ble utplassert på Uranienborg i perioden 7. januar til 22. januar 2004. Isen lå fra innerst i Bunnefjorden og nesten ut til Uranienborg da måleren ble tatt opp.

Vannstandsdata fra Oslo havn og Oscarsborg ble innhentet fra Sjøkartverket for desember 2003 og januar 2004. Tabell 3.1 gir en oversikt over hvilke stasjoner og hvilke perioder vi har vannstandsmålinger for.

### 3.2.3 Instrumentenes nøyaktighet

I perioden 29. oktober til 4. november ble alle fire sensorene utplassert ved Biologisk stasjon i Drøbak. De ble festet ved siden av hverandre på samme planke og plassert ut i vannet. For å finne et estimat på den relative nøyaktigheten, ble først middelveiden til hver måleserie trukket fra slik at kun de relative endringene i måleserien var igjen. Deretter beregnet jeg avviket til hver av målerne. I disse beregningene ble avviket på et tidspunkt beregnet fra middelveiden til de fire måleseriene på samme tidspunkt.

$$\epsilon_m^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_{mn} - \bar{x}_n)^2, m = 1, 2, 3, 4$$

hvor  $m$  er målnummer, og

$$\bar{x}_n = \frac{x_{1n} + x_{2n} + x_{3n} + x_{4n}}{4}.$$

Avvik	cm
$\epsilon_1$	0.94
$\epsilon_2$	1.07
$\epsilon_3$	1.38
$\epsilon_4$	1.05

Tabell 3.3: *Relativ nøyaktighet. Indeksen er identifikasjonsnummeret til målerne Bortsett fra måler nummer 3 ligger nøyaktigheten på omtrent  $\pm 1$  cm.*

### 3.2.4 Måleusikkerhet

Anslaget for volumtransporten har følgende form:

$$Q = F_1 h_{1t} + \dots + F_5 h_{5t} \quad (3.1)$$

hvor  $h_{mt}$  er den tidsderiverte til  $h_m$ . Standardavviket til den sammensatte funksjonen  $Q$  kan da beregnes på følgende måte

$$S_Q^2 = \left( \frac{\partial Q}{\partial F_1} S_{F_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial Q}{\partial h_{1t}} S_{h_{1t}} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial Q}{\partial F_5} S_{F_5} \right)^2 + \left( \frac{\partial Q}{\partial h_{5t}} S_{h_{5t}} \right)^2 \quad (3.2)$$

hvor  $S_h$  er standardavviket til funksjonen  $h$ . Vi antar at

$$h_{1t}^2 \approx h_{2t}^2 \approx h_{3t}^2 \approx h_{4t}^2 \approx h_{5t}^2 < \max(h_t)^2$$

og

$$S_{F_1}^2 + S_{F_2}^2 + S_{F_3}^2 + S_{F_4}^2 + S_{F_5}^2 < S_F^2$$

Vi har da

$$S_Q^2 = (\max(h_t) S_F)^2 + (F_1 S_{h_{-1t}})^2 + \dots + (F_5 S_{h_{-5t}})^2 \quad (3.3)$$

$Q$  varierer ikke lineært, men vi kan fjerne den periodiske variasjonen med et glidende middel. Ved at trekke fra et glidende middel over en time, sitter man igjen med støyet i måledataene. Vi antar at denne støyen representerer feil i måledataene.

Ved å benytte  $F = 188,4 \text{ km}^2$  og  $S_F = 2,3 \text{ km}^2$ , ble standardavviket til  $Q$  beregnet til  $250 \text{ m}^3/\text{s}$  når fjorden var delt opp i fem deler. Ved å la vannstanden ved Oslo havn representere hele fjordarealet, ble standardavviket  $430 \text{ m}^3/\text{s}$ . Målenøyaktigheten blir bedre når fjorden deles opp.

## 3.3 Bunnmontert strømmåler

### 3.3.1 Nortek AWAC

Måleren som ble brukt var en AWAC (Acoustic Wave And Current profiler) produsert av Nortek AS. Nortek AS er et firma etablert i 1996, som er eksperter på dopplertechnologi og utvikler og produserer doppler-strømmålere. Instrumentet måler strømhastigheten i en vertikalprofil og bølgene på overflata. Det er kun spesifikasjonene for måling av strøm som vi vil se på her.

AWAC består av to hoveddeler;

- en sensordel, hvor tre akustiske signalomformere (transducere) og mot-takerelektronikk er montert på sensorhodet. I sensordelen er det plassert temperatursensor, trykksensor, kompass og sensor for måling av helningsvinkel samt batteri.
- en prosessordel. Prosessoren sender og mottar signaler fra sensoren og målingene blir lagret her.

#### Måleprinsipper og definisjon av begreper.

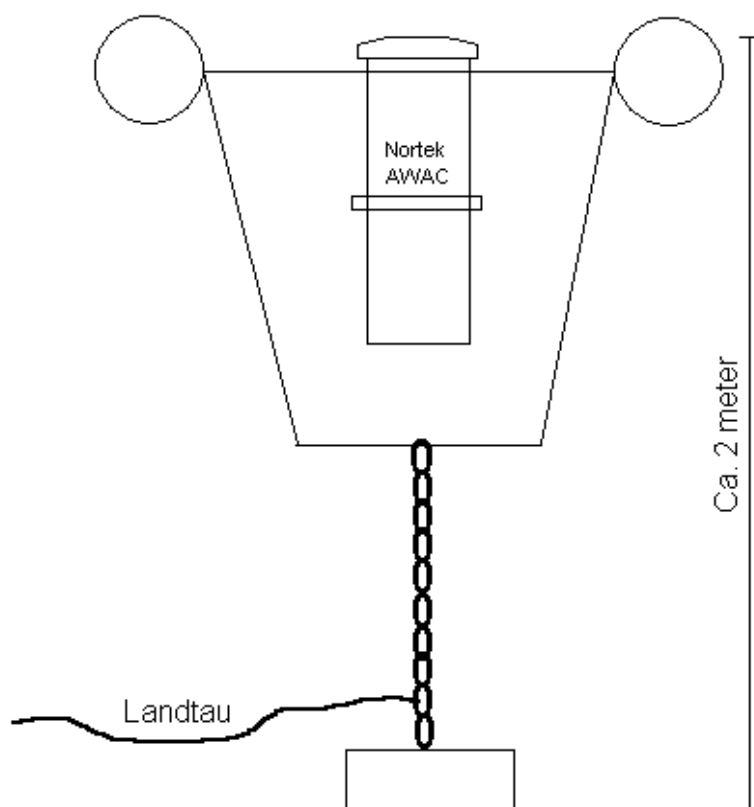
Øverst på sensoren har vi sensorhodet. Her er det plassert tre transducere som sender ut akustiske pulser langs tre forskjellige akser. Aksene er orientert  $120^\circ$  i fra hverandre i det horisontale planet, og hver akse står  $25^\circ$  på vertikalen. Pulsene som blir sendt ut reflekteres av partikler langs aksene. Det reflekterte signalet har en frekvensforskyvning avhengig av partiklenes hastighet. Dette er et kjent fysisk fenomen som kalles dopplereffekten. På den måten kan vannets hastighet måles. I og med at pulsens hastighet er kjent vet man også hvor i vannsøylen man måler.

En *puls* er et akustisk signal som blir sendt ut fra en transducer. Pulsen har en fysisk lengde som i vårt tilfelle er 1 meter.

En *målecelle* er et fast fysisk område i vannsøylen hvor strømhastigheten blir målt. Cellestørrelsen blir spesifisert utifra den vertikale avstanden fra sensorhodet. Denne størrelsen avgjør den vertikale oppløsningen til målingene, og er lik pulslengden. Målecellens posisjon er den vertikale avstanden til cellesenteret.

*Blankingavstanden* er den avstanden fra sensorhodet eller det området hvor mottakeren i sensoren ikke lytter. Etter at en puls er sendt ut, bruker sensoren litt tid på å roe seg før den begynner å lytte. På denne tiden rekker en puls å bevege seg 0,4 meter fra sensorhodet. Det første cellesenteret ligger i en vertikal avstand lik blankingavstanden pluss en pulslengde. I vårt oppsett er den første celleposisjonen 1,4 meter fra sensorhodet.

Et *ping* er en enkelt beregning av en strømprofil. De tre transducerne sender ut hver sin puls, og mottakerdelen lytter til det reflekterte signalet og hastigheten måles langs aksene. Dataene kombineres, og strømhastigheten i et kartesisk koordinatsystem i forhold til måleren beregnes i hver dybdecelle.



Figur 3.2: Skisse av riggen til AWAC.

*Midlingsintervallet* er den perioden som et gitt antall ping midles over. Standard oppsett er 1 minutt.

*Målingsintervallet* er perioden mellom hver måling som blir logget. Målingsintervallet må være større eller lik midlingsintervallet. I vårt tilfelle var dette intervallet på 10 minutter.

Måledataene ble analysert med programmet ExploreP, produsert av Nortek AS. For å plassere en AWAC på havbunnen må den monteres i en egnet rigg. En skisse av måleren og riggen er vist i figur 3.2.

### 3.3.2 Utplassering av instrumentet

Den 8. januar 2004 ble riggen med strømmåleren utplassert fra Trygve Braarud (bare omtalt som TB seinere). Utplasseringen ble ledet av Jan Magnusson fra NIVA.

Måleren hadde på forhånd blitt montert i riggen på NIVA. Riggen hadde åtte flytebøyer for å holde den loddrett i vannet. Som synkelodd ble fire biter av gamle jernbaneskinner brukt. Hele riggen ble senket ned til bunn. Den ble plassert på terskelens dypeste punkt. Dybden ble målt med TB sitt ekkolodd til 22,1 m.

Stasjon	Bredde	Lengde
DT-1	N 59° 39.964'	E 10° 37.010'
DT-2	N 59° 40.049'	E 10° 37.011'
DT-3	N 59° 40.144'	E 10° 36.930'
AWAC	N 59° 40.064'	E 10° 36.949'

Tabell 3.4: Posisjonene til CTD-stasjonene og strømmåleren AWAC. Datum er WGS84

På riggen var det festet et synketau som ble dratt inn til Småskjær. Måleren ble dratt litt ut av posisjon under operasjonen med feste av landtauet.

For å se på sjiktningen av vannet i den perioden da den bunnmonterte strømmåleren var utplassert, ble tre CTD-profiler tatt i forbindelse med utplasseringen: En utenfor, en oppå og en innenfor terskelen. Posisjonene er listet i tabell 3.4, og de er merket av på kartet i figur 3.4 på side 24.

Mandag 26. januar 2004 ble måleren hentet opp igjen. Det ble tatt en CTD-profil oppå terskelen i denne forbindelsen.

### 3.3.3 Måleusikkerhet

Volumtransporten ble beregnet av en formel på følgende form

$$Q_E = \alpha \left( \sum_{i=1}^{21} v_i A_i \right) \quad (3.4)$$

hvor  $\alpha$  er en faktor som ble definert i (2.5). Vi antar at det ikke er noen feil knyttet til arealberegningene. Ved å trekke et glidende middel på en time fra strømmålingene i hvert dyp, og så beregne standardavviket av differansene, kan standardavviket til  $Q^p$  beregnes. Standardavviket til  $Q_E$  blir:

$$S_{Q_E}^2 = S_{Q^p}^2 + (Q^p S_\alpha)^2$$

$S_{Q^p}$  ble beregnet til  $180 \text{ m}^3/\text{s}$ . Antar vi at den profilbaserte transporten er  $5000 \text{ m}^3/\text{s}$  og  $S_\alpha = 0,1$ , blir standardavviket  $S_{Q_E} = 530 \text{ m}^3/\text{s}$ . Vi ser at usikkerheten i faktoren  $\alpha$  har større betydning for måleusikkerheten enn usikkerheten i selve strømmålingene. I kapittel 5.3.1 skal vi se nærmere på tverrsnittarealet, og antagelsen om at det ikke er feil knyttet til arealberegningene.

### 3.3.4 Kystverkets bunnmonterte AWAC

Som nevnt i innledningen, foretok Nortek AS på oppdrag fra Kystverket strømmålinger i Drøbaksundet i 2001 og 2002. Den nye strømmåleren som er omtalt i kapittel 3.3.2, ble utplassert i samme posisjon som den første.

Kystverkets strømmåler var med en kabel koblet til en datalogger som var plassert på Biologisk stasjon i Drøbak. Data ble innhentet herfra høsten 2003. Tabell 3.5 viser hvilke måleserier som fins fra dengang.

Nr.	Start	Stopp	Måleintervall
1	040801 23:09:57	080801 08:09:57	1 time
2	080801 12:24:55	080901 11:59:55	5 min
3	210801 13:22:30	310801 19:26:23	5 min
4	310801 20:00:03	030901 20:00:03	10 min
5	010901 20:20:03	130901 19:40:03	10 min
6	210901 15:59:18	280901 13:39:18	10 min
7	280901 14:18:12	071001 13:58:12	10 min
8	071001 14:38:12	261001 13:38:01	10 min
9	260702 13:42:24	120802 17:22:24	10 min
10	151002 15:17:19	171202 21:17:19	10 min
11	081202 23:57:19	281202 11:57:19	10 min

Tabell 3.5: Måleseriene fra Kystverkets AWAC.

## 3.4 Fartøysmontert strømmåler

### 3.4.1 Instrumentet

VMCP står som nevnt i kapittel 2.3 for fartøysmontert strømmåler. VMCP-systemet på Trygve Braarud er basert på AWAC, og virkemåten er i utgangspunktet som beskrevet i kapittel 3.3.1. Instrumentet måler fartøyets fart gjennom vannet,  $\vec{v}_{VMCP}(z)$ . For å finne strømmens hastighet over bunnen som en funksjon av dypet,  $\vec{v}(z)$ , må man trekke fra fartøyets fart over grunnen  $\vec{v}_{SOG}$ .

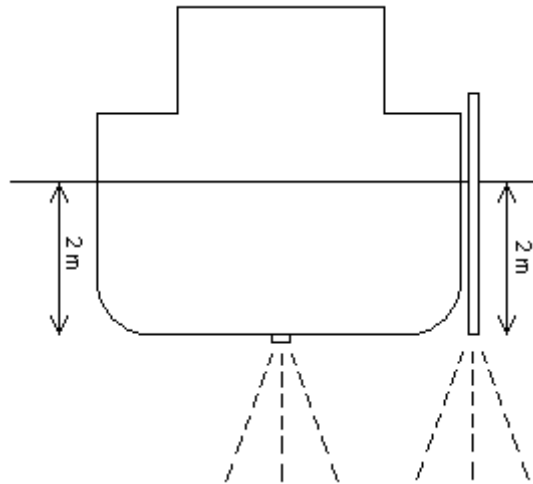
$$\vec{v}(z) = \vec{v}_{VMCP}(z) - \vec{v}_{SOG} \quad (3.5)$$

Når strømmen skal korrigeres, innføres det en del feil. Ved å kalibrere instrumentet kan det tas høyde for noe av dette. Kalibreringen består i å beregne to korreksjonsverdier.

Den ene korreksjonsverdien kalles *VMCP installasjonsvinkel*. Under installasjonen blir instrumentets  $x$ -akse forsøkt lagt på linje med skipets lengderetning. Rent praktisk er det ikke mulig å gjøre dette helt nøyaktig. Dette og feil i kompassdata som kommer fra skipets gyro blir rettet på med denne korreksjonsverdien.

Den andre korreksjonsverdien kalles *VMCP nøyaktighetskorreksjon*. Dette er forskjellen mellom gjennomsnittshastigheten målt av instrumentet og av fartøyets GPS. Operatøren av instrumentet må legge inn en verdi for lydhastigheten i vannet. Feil i lydhastighet blir korrigert for med denne verdien. Dette betyr at det må foretas en ny kalibrering når saltholdighet eller temperatur endres så mye at lydhastigheten endres.

Kalibreringen foregår på den måten at man seiler fartøyet med jevn fart og stø kurs et stykke mens man logger strømmålingene. Deretter seiler man på samme måte den motsatte veien mens man logger strømmålingene på nytt. De to korreksjonsverdiene blir beregnet utifra de to lagrede datasettene.



Figur 3.3: En skisse av et fartøy med to VMCP sett aktenfra.

Instrumentet sender ukorrigererte data ( $\vec{v}_{VMCP}$ ) til prosessorenheten hvert sekund. For at ikke strømvektoren skal være ustabil anbefaler Nortek en midling av strømvektoren over 20 sekunder.

### 3.4.2 Innsamling av data

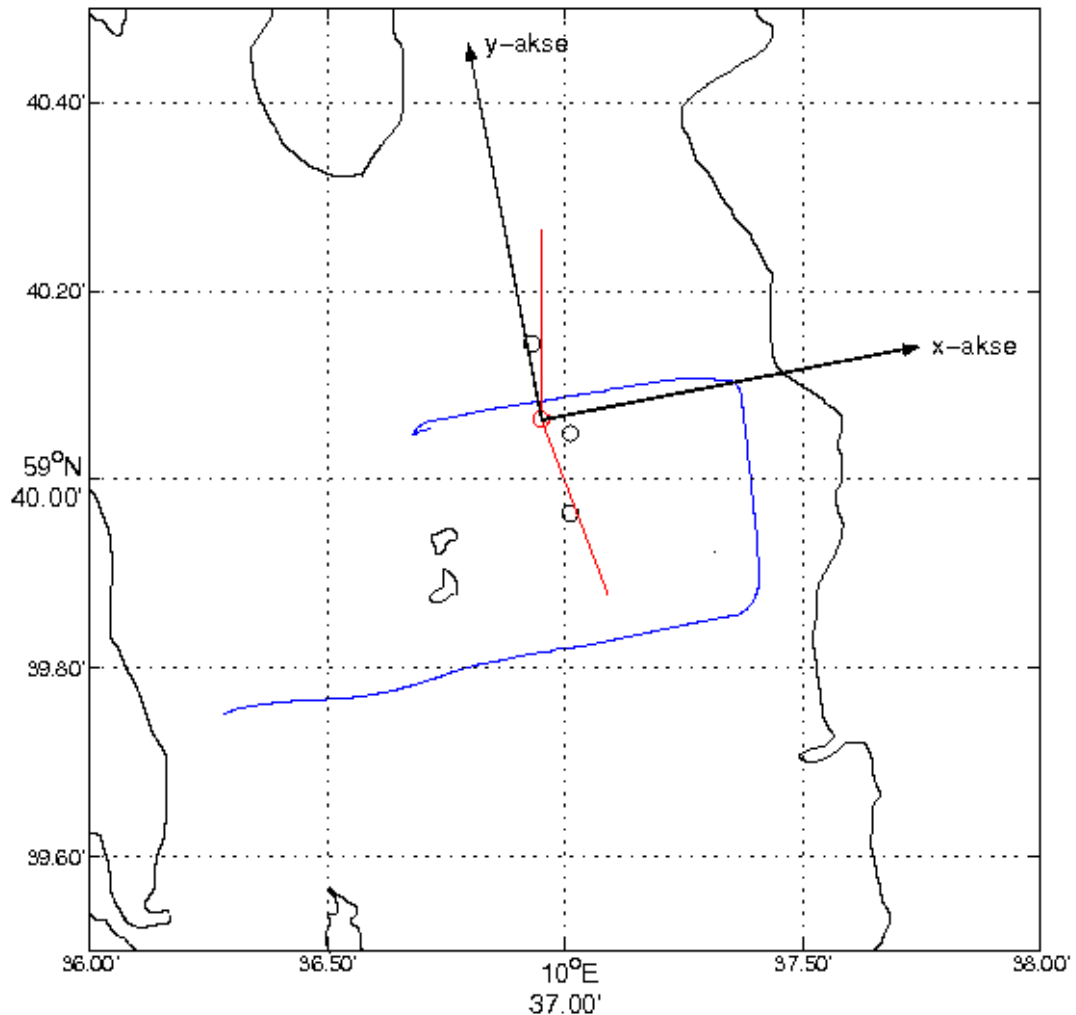
Torsdag 10. juni 2004 ble det foretatt strømmålinger i Drøbaksundet. Paul Connely var velvillig med som representant fra Nortek. Hensikten var å kalibrere strømmåleren på TB, heretter kalt VMCP-TB, og å samle inn data til denne hovedoppgaven. Connely hadde med seg en ekstra strømmåler, som vi for enkelthets skyld kaller VMCP-NT. Denne ble festet til skutensida. Figur 3.3 viser en skisse av måleropphenget.

Først ble det foretatt en kalibrering av instrumentene. Deretter ble Drøbaksundet krysset langs to snitt diverse ganger. Et tverrsnitt gikk over hele sundet sør for Småskjær. Det andre gikk i det østlige løp rett nord for terskelen. Figur 3.4 viser en del av seilingssporet til TB under målingene.

Målingene ble foretatt i to omganger denne torsdagen. Først fra 13:23 til 14:11, og så fra 15:46 til 16:43. Tidene er oppgitt i norsk sommertid (UTC +2). I den siste perioden var det bare VMCP-NT som var i drift. Med tanke på kvalitetssikring av data er det gunstig å måle når strømmen er sterkest. Som vi ser av figur 3.5 så er den første måleperioden uheldig, i og med at det er høyvann ved Oscarsborg og ikke så mye strøm. Målingene fra den andre måleperioden burde gi høye utgående volumtransporter.

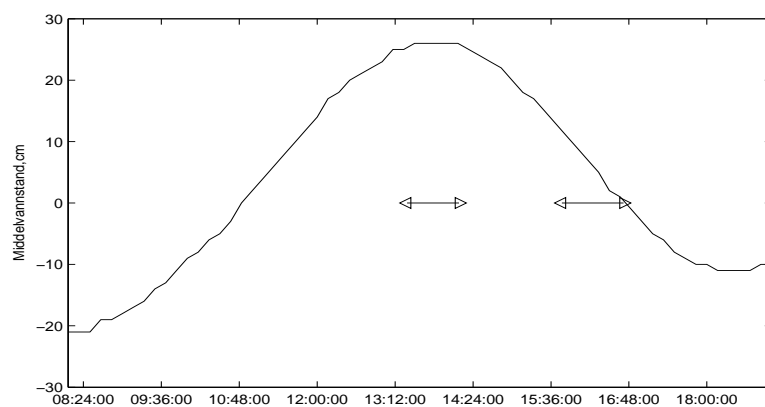
### 3.4.3 Kvalitetssikring av data

De to VMCPene som var montert på TB hadde forskjellige spesifikasjoner (tabell 3.6). Posisjonen til det første celledetektoren får vi ved å summere monteringsdypet, blankingen og en celledørrelse. Det maksimale dypet er det dypet hvor det i følge Nortek kan forventes å få nøyaktige data. Nøyak-



Figur 3.4: En skisse over Drøbaksundet. Kystlinjen er tegnet med svarte streker. De to små øyene sørvest for den røde sirkelen er Småskjær. Posisjonen til strømmåleren er tegnet inn (rød sirkel), samt posisjonene til CTD-stasjonene fra tabell 3.4 (svarte sirkler). Koordinatsystemet som har blitt valgt til presentasjon av målingene er også tegnet inn. Origo er lagt i overflata rett over posisjonen til den bunnmonterte strømmåleren.  $y$ -aksen peker i retning  $349^\circ$ . Hovedretningene til strømmen inn ( $000^\circ$ ) og ut ( $159^\circ$ ) av sundet er markert med røde streker. Trygve Braarud sin kurs under innsamling av VMCP-data er tegnet inn med en blå linje.





Figur 3.5: Observert vannstanden ved Oscarsborg 10. juni 2004 i sommertid (UTC+2). Måleperiodene er markert med piler.

	VMCP-TB	VMCP-NT
Antall celler	20	30
Cellestørrelse	5 m	2 m
Blanking	1 m	1 m
Monteringsdyp	2 m	2 m
Frekvens	190 kHz	600 kHz
Første celle	8 m	5 m
Maks dyp	25 m	68 m
Nøyaktighet	6,48 cm/s	11,58 cm/s

Tabell 3.6: Spesifikasjonene til VMCPene.

tigheten i tabellen er beregnet av programvaren SurveyVM utviklet av Nor-tek AS. Dette er nøyaktigheten til strømmålingene som kommer fra sensoren.

Korreksjonen for skipets fart innfører en feil til. Denne feilen er sterkt avhengig av om fartøyet holder jevn fart og kurs eller ikke. Når skipet endrer kurs kan det ikke forventes å få pålitelige strømdata.

For å få en indikasjon på om kvaliteten er god kan vi se på den observerte vannstanden ved Oscarsborg. Når vannet synker, så kan vi forvente utgående strøm i sundet. Når vannet stiger kan vi forvente inngående strøm.

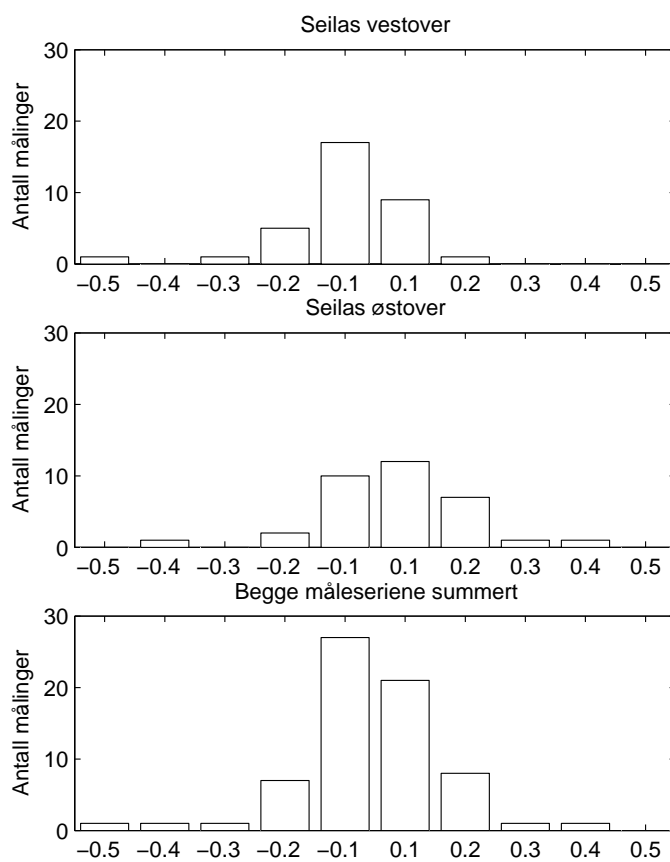
Siden vi hadde to uavhengige VMCP'er som målte samtidig, kan vi si litt om kvaliteten. Hvis de to målerne måler det samme, etter at målingene er interpolert til samme horisontale posisjon, er det et tegn på at strømmålingene er reelle, eller at de blir påvirket av støy på samme måte, ved at for eksempel fartøyet krenger. Hvis målingene er helt forskjellige tyder det på at kvaliteten er dårlig og at målingene er støy. Målingene var midlet over 20 sekunder.

Figur 3.7 og 3.8 viser resultater fra strømmålingene fra de to VMCP'ene, henholdsvis når et tverrsnitt i østre løp krysses fra øst til vest og fra vest til øst. Dette er målinger fra den første måleperioden, hvor det var høyvann ved Oscarsborg. For å sammenligne de to målerne, ble verdiene fra den måleren med høyest dybdeoppløsning interpolert til dybdene fra den måleren med lavest oppløsning. Målingene ble også interpolert i horisontal retning, slik at de viste strømmen fra samme posisjon.

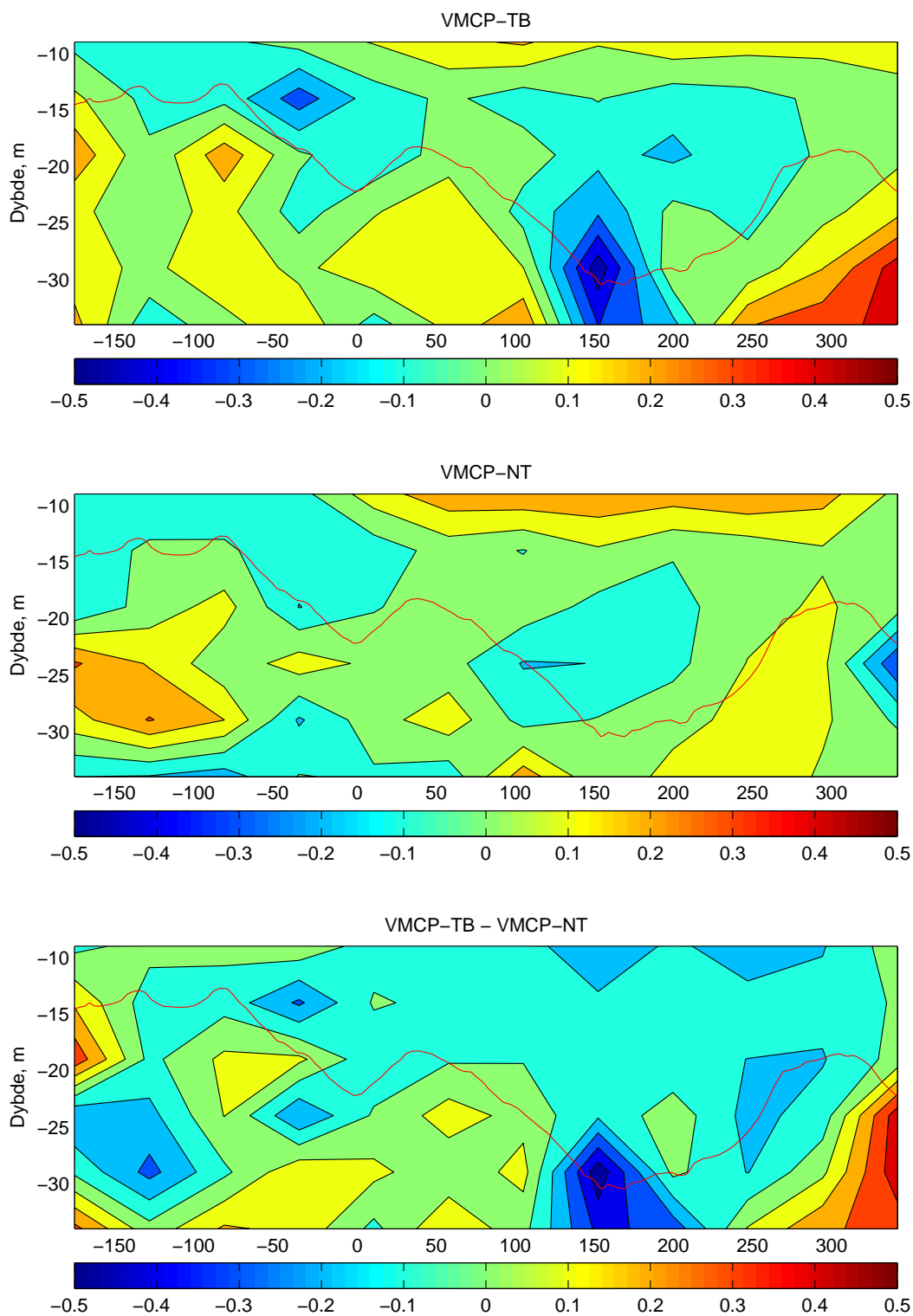
For å få tallfestet forskjellen mellom de to strømmålerne, ble først differansen mellom dem beregnet, og så ble alle målinger som befant seg under bunntopografien fjernet. Deretter ble antall målinger i intervaller på  $0,1 \text{ m/s}$  telt opp og tegnet opp i et stolpediagram (figur 3.6). Resultatet var at det var 70 % sannsynlig at målingene fra VMCP-TB skulle havne innenfor et intervall på  $\pm 0,1 \text{ m/s}$  i forhold til målingene fra VMCP-NT. Antar vi statistisk normalfordeling, vil 67 % av målingene være innefor et standardavvik. Vi kan derfor si at standardavviket til strømmålingene er  $0,1 \text{ m/s}$ .

For å få en uavhengig kvalitetssikring av VMCP-TB, ble to forskjellige strømmålere hengt ut fra TB sin skuteside. Instrumentene hang på åtte meters dyp, mens fartøyet gjorde fart gjennom vannet. Råmålingene fra VMCP-TB (ikke korrigert for skipets fart) skulle da gi tilsvarende verdier som de to uavhengige målerne.

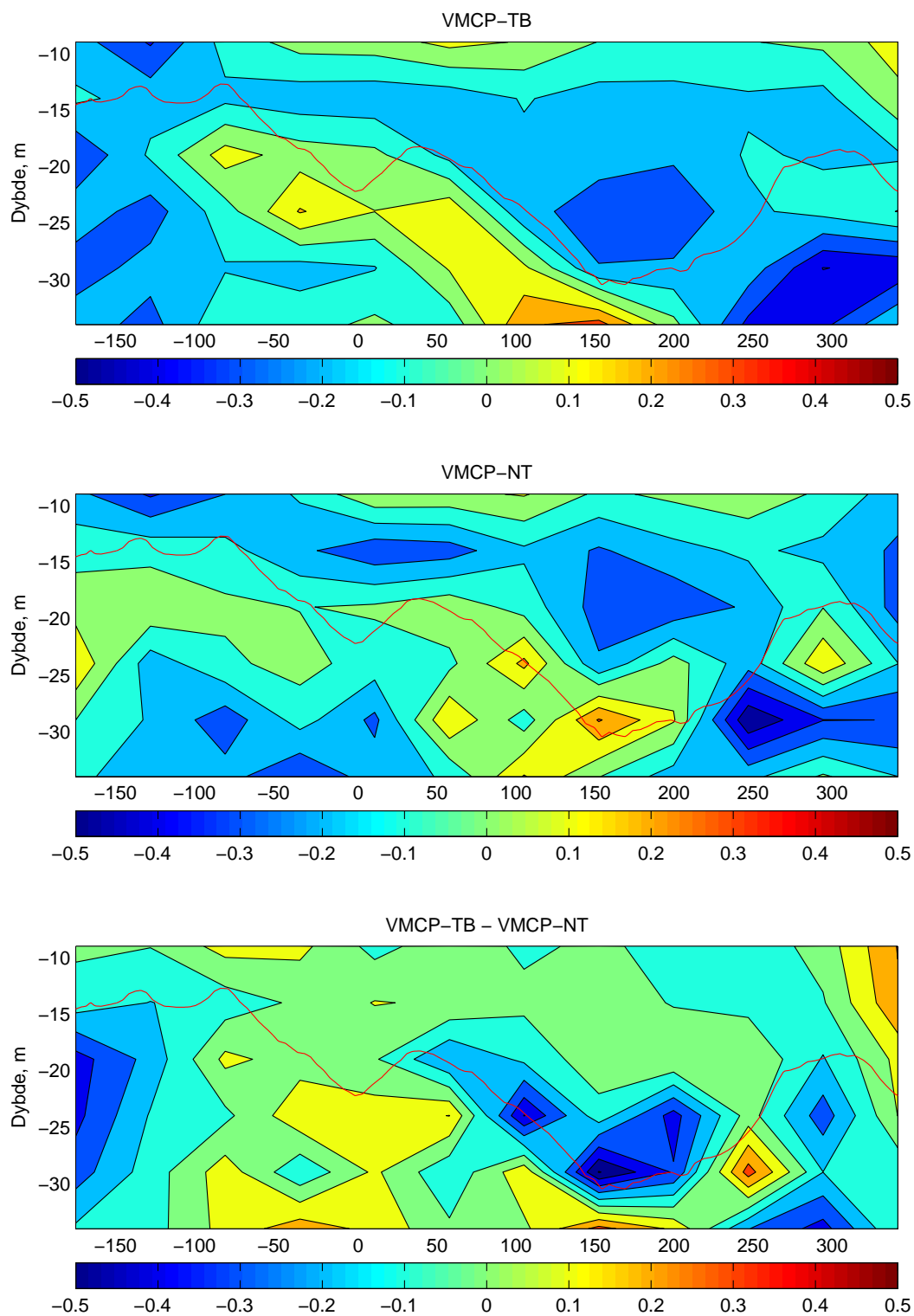
Den ene måleren som ble brukt var en SD2000 som midler over fem minutter. Den andre var en mekanisk måler som kalles Lille Ekman. Denne måleren hang ute i ti minutter av gangen. For å finne strømhastigheten blir antall omdreininger som måleren har gjort mens den er i vannet lest av, og deretter blir det dividert på tidsforbruket og strømhastigheten blir lest av på en kalibreringskurve. Små blyhagl slippes med jevne mellomrom via et kompass ned i kamre som angir retningen. Ved å telle antall hagl i hvert kammer kan



Figur 3.6: Stolpediagram for differansen mellom målingene fra VMCP-TB og VMCP-NT. Verdiene på den horisontale akse viser høyeste verdi i m/s for hvert måleintervall.



Figur 3.7: Kryssning av østre løp fra øst mot vest. Den nederste figuren viser målingene fra VMCP-TB minus målingene fra VMCP-NT. Fargeskalaene angir strømhastighet i m/s. Den røde linja angir bunntopografien.



Figur 3.8: Kryssning av østre løp fra vest mot øst. Den nederste figuren viser målingene fra VMCP-TB minus målingene fra VMCP-NT. Fargeskalaene angir strømhastighet i m/s. Den røde linja angir bunntopografien.

	VMCP-TB	SD2000	Lille Ekman
Måleperiode	11:48-11:53	11:48-11:53	11:44:11:54
Retning	311,3	100	258,8
Hastighet ( $m/s$ )	0,24	0,24	0,34
Måleperiode	12:18-12:23	12:18-12:23	12:15:12:25
Retning	309,7	111	253,3
Hastighet ( $m/s$ )	0,28	0,28	0,36
Måleperiode	12:38-12:43	12:38-12:43	12:35-12:45
Retning	299,4	146	225,6
Hastighet ( $m/s$ )	0,29	0,27	0,38
Måleperiode	13:13-13:18	13:13-13:18	13:11-13:21
Retning	008,8	096	294,5
Hastighet ( $m/s$ )	0,12	0,12	0,36
Måleperiode	13:06-13:11	13:06-13:11	13:05-13:15
Retning	307,3	025	018,6
Hastighet ( $m/s$ )	0,74	0,57	0,89
Måleperiode	13:26-13:31	13:26-13:31	13:26-13:36
Retning	314,2	001	001,7
Hastighet ( $m/s$ )	0,95	0,73	1,21

Tabell 3.7: Resultatene fra kalibreringstest av strømmåler (VMCP-TB).

man finne hovedretningen til strømmen. I de to andre målerne blir nord- og øst-komponenten av strømmen midlet hver for seg. Negative verdier vil da balansere positive verdier. Det er altså forventet at Lille Ekman skal gi høyere strømhastigheter når retningen er ustabil.

Tabell 3.7 viser resultatene, og det er tydelig at overensstemmelsen ikke er helt tilfredsstillende. Lille Ekman har generelt for høye resultater. Denne har ikke blitt kalibrert på 30 år, men det er litt mystisk at ikke måleren har blitt tregere med årene.

Kompasset til SD2000 ble testet ved å logge retningen i fem minutter, mens måleren sto på et bord i fire forskjellige kjente himmelretninger. De loggede resultatene var ikke tilfredsstillende. Kompasset er trolig lett påvirkelig av magnetiske forstyrrelser.

På lave strømhastigheter er det svært god overensstemmelse mellom VMCP-TB og SD2000, men ikke på høyere hastigheter.

### 3.4.4 Måleusikkerhet

Volumtransporten målt med VMCP blir nå beregnet med følgende formel

$$Q_E = \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K v_{ik} A_{ik} + Q_e + Q_w \quad (3.6)$$

hvor  $Q_e$  og  $Q_w$  er sidetransportene. Det vil si transportene helt inne ved strandsonen hvor fartøyet ikke seilte under innsamling av data. Vi setter  $S_v = 0,1 m/s$ . Standardavviket til transporten blir da

$$S_{Q_E}^2 = 0,01 \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K A_{ik}^2 + (max(u)S_A)^2 \quad (3.7)$$

Vi setter  $S_A = 215 m^2$  etter diverse beregninger av tverrsnittarealet, og den maksimale strømmen til  $0,5 m/s$ . Standardavviket til transporten i det østre løp blir da  $140 m^3/s$ .

For å beregne sidetransportene blir strømmålingene nærmest kysten interpolert inn til land. Ved å benytte interpoleringsmetoder som gir maksimal og minimal sidetransport, kan vi anslå usikkerheten. Målinger viser at sidetransporten kan anslås med en usikkerhet på  $\pm 320 m^3/s$ . Vi anslår standardavviket til halve grenseavviket, som blir  $160 m^3/s$ . Det samlede standardavviket til volumtransporten kan da anslås til  $300 m^3/s$ . Denne beregningen gjelder snitt A i det østlige løpet.

### 3.5 Modellsimulering

I samarbeid med professor Bjørn Gjevik på Matematisk institutt, avdeling for mekanikk, ble det kjørt en numerisk simuleringsmodell for Oslofjorden. Data inn i modellen var vannstanden ved Filtvedt. Data for volumfluks og vannstanden for Indre Fjord ble hentet ut av modellkjøringa.

#### 3.5.1 Beskrivelse av modellen

Modellen er utarbeidet ved Matematisk institutt, Universitetet i Oslo. En tilsvarende modell er beskrevet av Moe m fl (2002). Modellområdet starter ved Filtvedt. Fjorden er delt opp i beregningsbokser. Oppløsningen er på  $100\text{ m} \times 100\text{ m}$  og  $200\text{ m} \times 200\text{ m}$ . Vi legger  $y$ -aksen positivt nordover, og  $x$ -aksen positivt østover. Modellområdet har da en utstrekning på  $40\text{ km}$  i  $y$ -retning, og  $20\text{ km}$  i  $x$ -retning. Origo er lagt i nedre venstre hjørne. Posisjonen til senteret av hver beregning  $(i, j)$ , er gitt ved

$$x_i = \Delta x(i - 1), i = 1, 2 \dots I - 1, I \quad (3.8)$$

og

$$y_j = \Delta y(j - 1), j = 1, 2 \dots J - 1, J \quad (3.9)$$

hvor  $I=101$  eller  $201$  og  $J=201$  eller  $401$ . Hver boks er tilknyttet et middeldyp  $H_{0ij} = H_0(x_i, y_j)$  som er bestemt utifra data fra Sjøkartverket. I hver boks beregnes vannstanden

$$h(x, y, t) = H(x, y, t) - H_0(x, y),$$

hvor  $t$  er tiden og  $H$  er vannndybden, og den dybdeintegreerte strømhastigheten

$$U = H\bar{u}$$

$$V = H\bar{v}$$

hvor  $(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{H} \int_{z=-H_0}^{z=h} (u, v) dz$ . De likningene som er blitt løst kalles de dybdeintegreerte grundtvannsligningene. Konvektiv akselerasjon er blitt sett bort i fra. Den lokale akselerasjonen er blitt balansert av trykkrefter på grunn av helning av overflata, Corioliskrafta og bunnfriksjon.

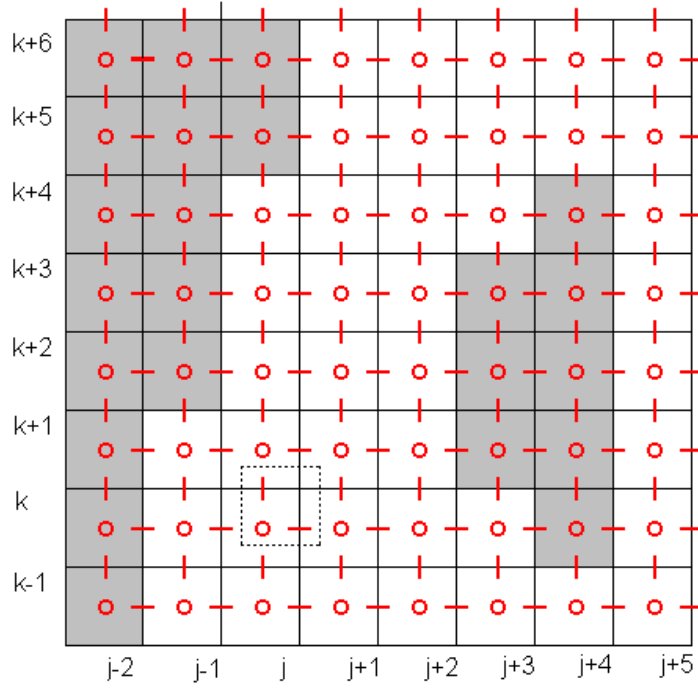
$$\frac{\partial U}{\partial t} - fV = -gH \frac{\partial h}{\partial x} - C_D \frac{\sqrt{U^2 + V^2}}{H} \frac{U}{H} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + fU = -gH \frac{\partial h}{\partial y} - C_D \frac{\sqrt{U^2 + V^2}}{H} \frac{V}{H} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} \quad (3.12)$$

$f$  er Coriolisparameteren,  $C_D$  er friksjonskoeffisienten og  $g$  er tyngdens akselerasjon.





Figur 3.9: Gitteret som ble brukt.  $U$  (-) blir beregnet midt i mellom to  $h$ -punkter (o) i  $x$ -retning.  $V$  (/) blir beregnet midt i mellom to  $h$ -punkter (o) i  $y$ -retning. Posisjonene til  $U_{jk}$ ,  $V_{jk}$  og  $h_{jk}$  er merket av med en stiplet boks.

Det som driver modellen er vannstanden ved Filtvedt. Grenseflatebetingelsene for modellen er at flukser normalt på kysten skal være lik null. Ved den åpne randen settes  $h(y = 0)$  lik vannstanden ved Filtvedt, og fluksene gjennom kystlinja settes lik null. Vannstandsobservasjonene for Filtvedt er hentet fra Statens Kartverk sine hjemmesider.

Startbetingelsene for modellen var  $U = V = h = 0$ . For at det ikke skulle bli så brå overgang fra startbetingelsen til grenseflatebetingelsen, ble grenseflatebetingelsen multiplisert med en faktor  $(1 - e^{-\mu t})$ .  $\mu$  hadde tallverdien  $4,6 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  og denne faktoren hadde vokst til 0,98 etter 24 timer.

### 3.5.2 Numerisk implementering

Det ble brukt et forskjøvet gitter. Figur 3.9 viser gitteret som ble brukt. Kysten blir lagt slik at kun normalhastigheter spesifiseres her.

$$U_{ij}^{n+1} = U_{ij}^n + \Delta t \left( f\bar{V}_{ij}^n - \frac{gH_{ij}^u}{\Delta s}(h_{i+1j}^n - h_{ij}^n) - C_d \frac{\sqrt{(U_{ij}^n)^2 + (\bar{V}_{ij}^n)^2}}{H_{ij}^u} \frac{U_{ij}^n}{H_{ij}^u} \right) \quad (3.13)$$

$$V_{ij}^{n+1} = V_{ij}^n + \Delta t \left( -f\bar{U}_{ij}^{n+1} - \frac{gH_{ij}^v}{\Delta s}(h_{ij+1}^n - h_{ij}^n) - C_d \frac{\sqrt{(\bar{U}_{ij}^{n+1})^2 + (V_{ij}^n)^2}}{H_{ij}^v} \frac{V_{ij}^n}{H_{ij}^v} \right) \quad (3.14)$$

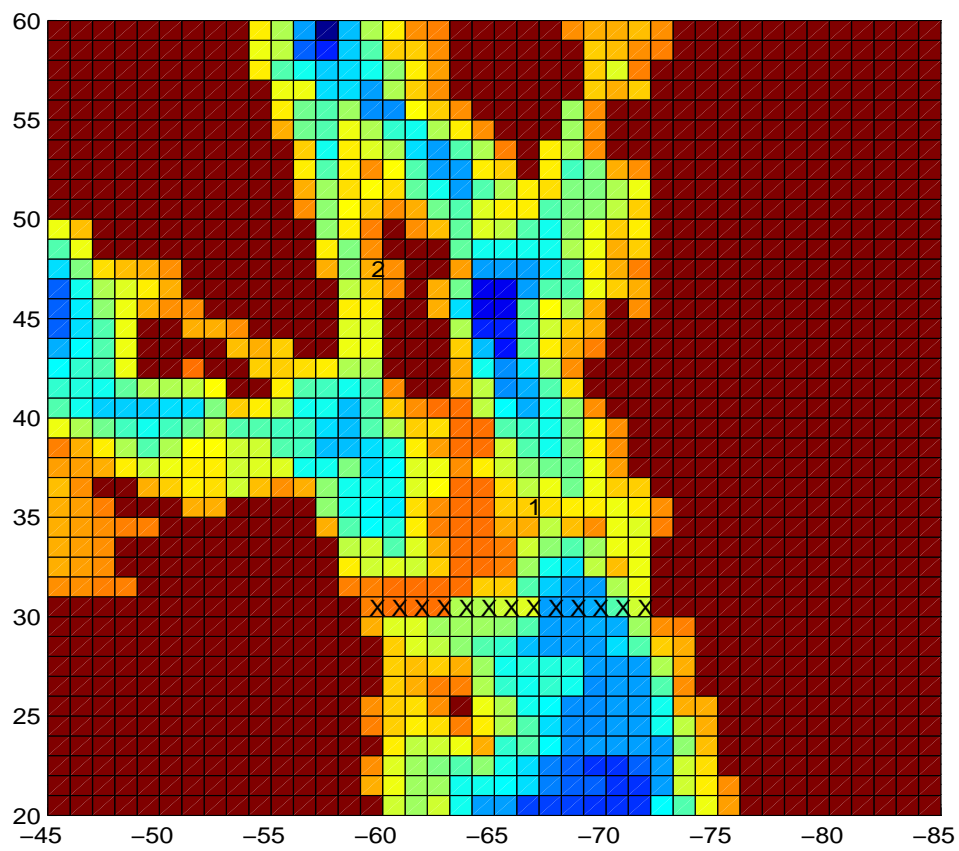
$$h_{ij}^{n+1} = h_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta s} \left( U_{ij}^{n+1} - U_{i-1j}^{n+1} + V_{ij}^{n+1} - V_{ij-1}^{n+1} \right) \quad (3.15)$$

Siden vi bruker et forskjøvet gitter, er det viktig at man bruker verdier i riktig posisjon. Coriolisleddet og verdien for vanndybden i (3.1.3) må interpoleres til et  $U$ -punkt, og Coriolisleddet og verdien for vanndybden i (3.1.4) må interpoleres til et  $V$ -punkt.

### 3.5.3 Kjøring av modellen

Gjevik kjørte modellen med 100 meters oppløsning. Svingninger på  $M_6$ -frekvensen som fins i måledataene, ble av modellen forsterket på en ufsikalsk måte. Svingningene ble ikke dempet av økt bunnfriksjon. Volumtransporten ble beregnet gjennom et snitt som gikk i retning østover over terskelen, se figur 3.10. Bare  $y$ -komponenten av strømmen ble brukt i beregningene av nord-sør-transporten.

Modellen ble uavhengig implementert i Matlab av herværende forfatter, og bunntopografi med oppløsning på 200 meter ble lagt inn. Friksjonskoeffisienten ble satt til 0,045. De ufsikalske svingningene oppsto også i denne modellen. En tidevannsperiode som var beregnet etter at  $\mu$ -faktoren hadde vokst seg nesten til en, men før de ufsikalske svingningene hadde fått vokst seg for store, ble analysert.



Figur 3.10: Kart over et utsnitt av modellområdet. Beregningsboksene er på  $100\text{ m} \times 100\text{ m}$ . Det snittet som simuleringsmodellen beregner volumtransport gjennom, er merket av med 13 kryss. AWAC-posisjonene er merket med 1. Vannstandsmåleren ved Oscarsborg er merket med 2.



## Kapittel 4

# Resultater

### 4.1 Volumtransport

#### 4.1.1 Strømmålinger fra bunnmontert AWAC

Dataene fra den første AWAC-måleren, som ble plassert ut på Drøbakterskelen i 2001, ble innhentet fra dataloggeren på Biologisk stasjon i Drøbak. Dette er måleserier fra høsten 2001 og høsten/vinteren 2002, hvor den lengste er på 20 dager.

Målingene fra den andre AWAC-måleren ga en sammenhengende måleserie fra 8. til 27. januar 2004.

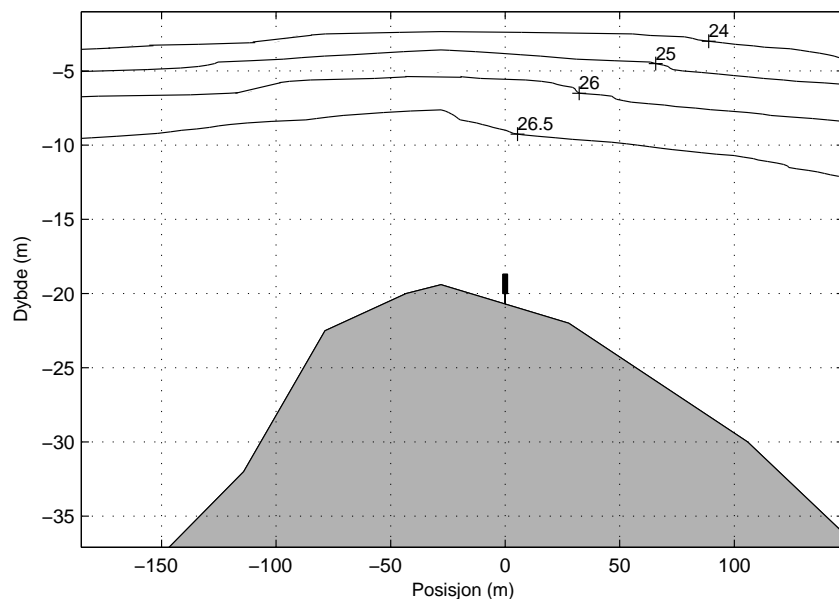
Figur 4.1 viser tettheten over terskelen en av dagene midt i måleperioden i januar 2004. En skisse av bunnprofilen og måleren er tegnet inn på figuren. Sprangsjiktet gikk fra 2 til 6 meters dyp denne dagen, med temperatursprang  $3,5\text{ }^{\circ}\text{C}$  -  $9,2\text{ }^{\circ}\text{C}$ , saltholdighetssprang 30,0 - 34,1 og tetthetssprang  $1023,8\text{ kg/m}^3$  -  $1026,5\text{ kg/m}^3$ .

Hovedretningen til AWAC-målingene er vist i figur 4.2 og 4.3. Retningene inn og ut er ikke 180 grader i forhold til hverandre. I den første måleserien er retningen innover dreid 10 grader mot klokka i forhold til nord. I den andre måleserien er retningen på vei innover rett nordover. Den utgående strømmen er dreid 20 grader mot klokka i forhold til sør på begge måleseriene.

Hvis man ser på et kart over Drøbaksundet, for eksempel kart A-701 fra Båtsportkartserien til Sjøkartverket, så ser man at isobatlinjen for 20-metersdypet på nordsiden av terskelen har en buktning rundt AWAC posisjonen. Måleren var altså plassert i en grop. Men nord for terskelen er isobaten rett i en strekning på over 350 meter. Retningen til denne linjen er dreid omtrent 40 grader mot klokka i forhold til nord-sør linja. Antar man topografisk styring av strømmen, kan det forklare strømmens retning ut av Indre Fjord.

På sørsiden av terskelen går isobatene omtrent på tvers av strømmen, og det er ikke lett å finne noe i topografien som skulle styre strømmen.

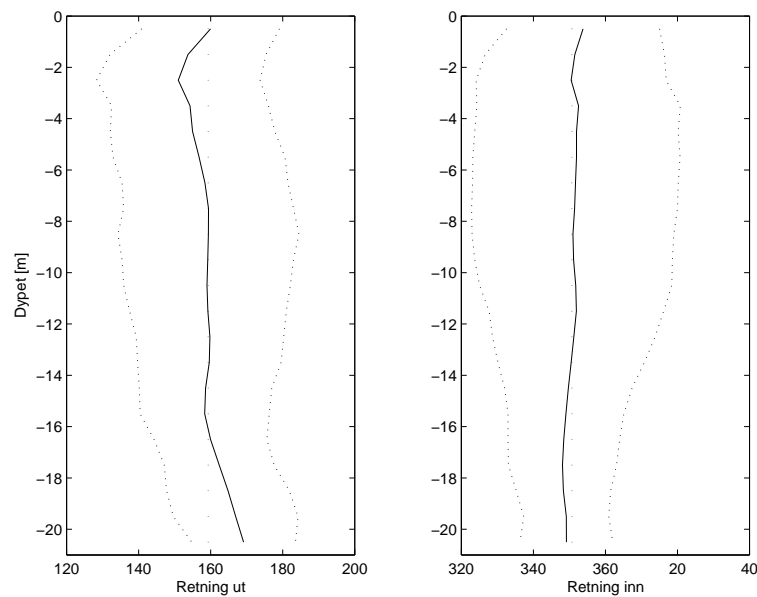
Forskjellen i strømretning mellom de to måleseriene kan skyldes at målerne ikke sto på nøyaktig samme posisjon.



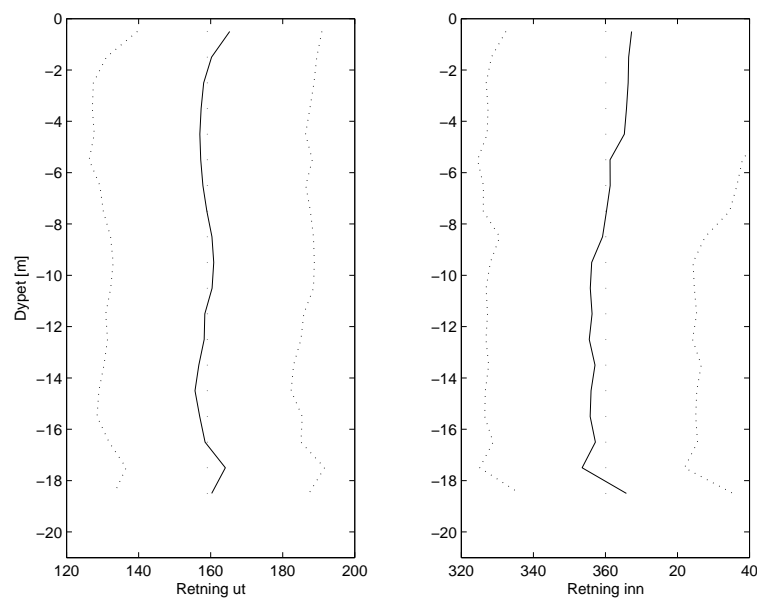
Figur 4.1: *Sjiktningen over terskelen 19. januar 2004. Isolinjene for  $\sigma_t$  er tegnet inn.*

Den maksimale målte strømmen i hvert dyp er plottet i figur 4.4. Strømmen inn er dekomponert til å følge positiv  $y$ -akse, og strømmen ut går motsatt vei. Vi ser at den maksimale strømmen minker nedover i dypet, men at den er over  $0,5 \text{ m/s}$  nær bunnen. Strømmen er like sterk inn og ut.

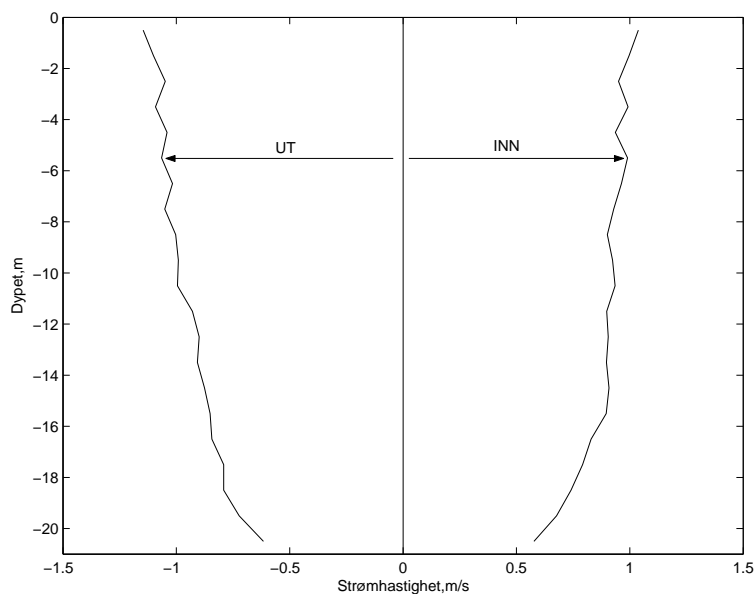
I figur 4.5 er isolinjene for strømhastigheten 19. januar 2004 plottet. Vi ser at strømmen til tider er ganske homogen fra overflata og ned til bunnen, mens den i andre tilfeller er lagdelt. Rundt 14:00 ser vi at vi ikke har noen strøm i overflata, men en inngående strøm under sprangsjiktet.



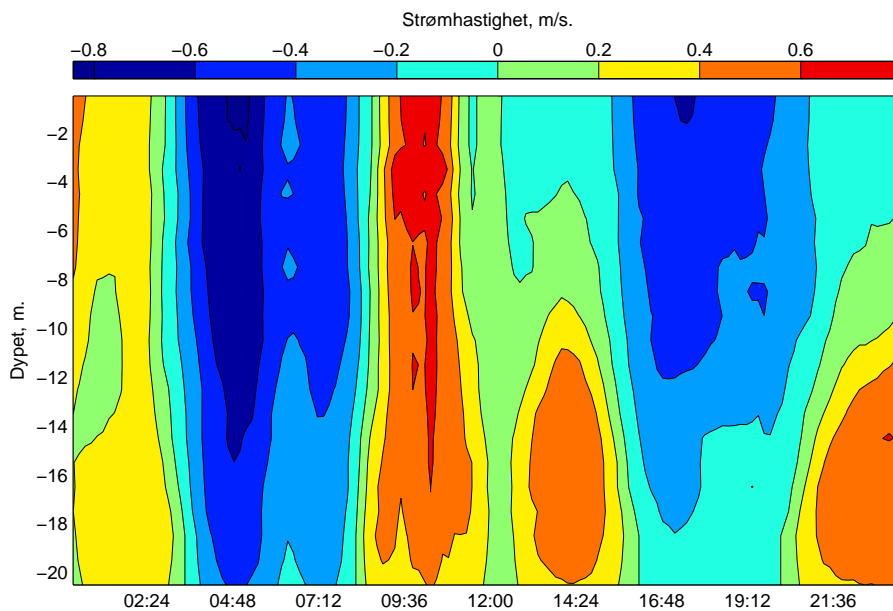
Figur 4.2: Retningen til strøbmålinger foretatt i perioden 7. til 26. oktober 2001. De stiplede linjene på hver side av den faste linja angir et standardavvik pluss og minus i forhold til middelveiden. Den stiplede linja i midten angir retningen midlet med hensyn på dypet. Middelveiden av retningen inn er  $351^\circ$ , og ut  $159^\circ$ .



Figur 4.3: Retningen til strøbmålinger foretatt i perioden 8. til 27. januar 2004. De stiplede linjene på hver side av den faste linja angir et standardavvik pluss og minus i forhold til middelveiden. Den stiplede linja i midten angir retningen midlet med hensyn på dypet. Middelveiden av retningen inn er  $0^\circ$ , og ut  $159^\circ$ .

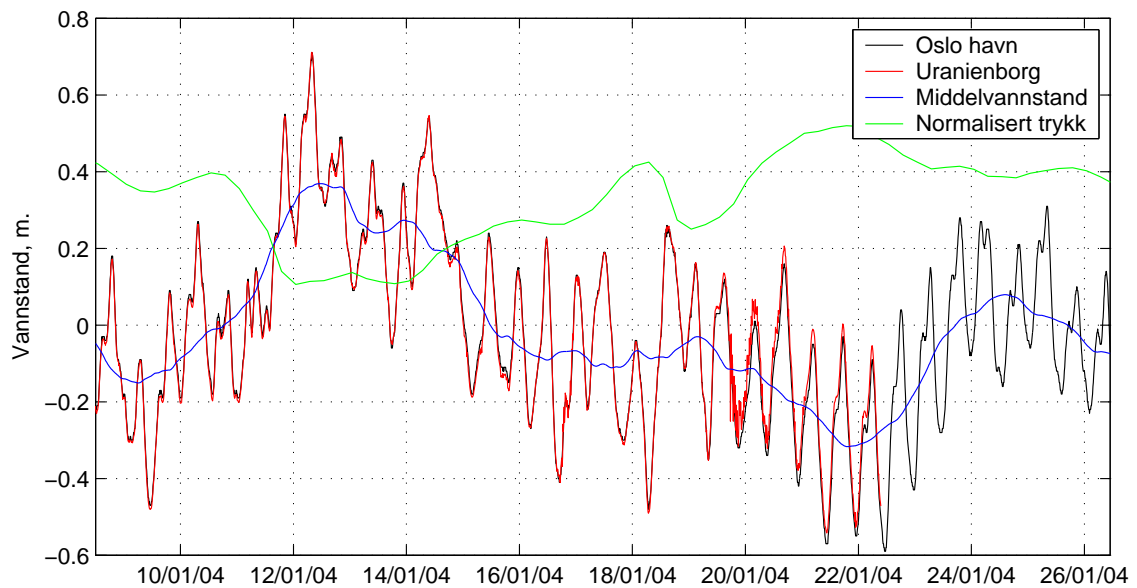


Figur 4.4: Den maksimale målte strømmen i hvert dyp i perioden 8. til 27. januar 2004.



Figur 4.5: Isovelene (linjer for lik strømhastighet) plottet som funksjon av dypet og tiden 19. januar 2004. Et glidende middel over 40 minutter er blitt brukt. Negative verdier angir strøm ut og positive verdier angir strøm inn i Indre Fjord.





Figur 4.6: Vannstand i Indre Oslofjord i perioden hvor den bunnmonterte AWACen (måler nr. 2) var utplassert på Drøbakerskelen. Middelvannstanden er et glidende middel av vannstanden i Oslo havn. Det er midlet over omtrent tre tidevannsperioder (37 timer). Det atmosfæriske trykket er omregnet ved å anta at  $1\text{hPa}=1\text{cm}$ . Referansenivået for atmosfæretrykket er lagt på 0,4 meter, slik at alt som er over 0,4 tilsvarer et trykk på over  $1000\text{hPa}$ . Grafen for vannstanden for Oslo havn (svart linje) forsvinner bak grafen for Uranienborg i og med at de to til tider er sammenfallende.

#### 4.1.2 Vannstandsmålinger

La oss se litt på de vannstandsdataene som ble samlet inn mens den bunnmonterte AWACen var ute (8. til 27 januar 2004). Figur 4.6 viser vannstanden i Oslo havn og ved Uranienborg. I tillegg vises middelvannstand og normalisert trykk.

Middelvannstanden ligger rundt null, helt til ettermiddagen 11. januar, hvor vi plutselig får en økning i vannstand. Det påfølgende høyvannet er 40 cm høyere enn det foregående. Denne økningen i vannstand henger sammen med det atmosfæriske trykkfallet. Middelvannstanden synker etter dette i rykk og napp, helt til 22. januar hvor den når et bunnivå. Etter dette stiger den igjen. Vi ser av figur 4.6 at lufttrykk og vannstand er negativt korrelert. Korrelasjonsfaktoren mellom middelvannstanden og det atmosfæriske trykket er  $-0,8606$ . Dette er som forventet.

I kapittel 2.4.3 på side 12 er det forklart hvordan faseforskyvning og forskjell i amplitude kan beregnes mellom to tidsserier. Resultatene er vist i tabell 4.1.  $\Delta t$  angir faseforskyvningen i minutter. Hvis faseforskyvningen er positiv for en stasjon, kommer for eksempel høyvann på denne stasjonen det angitte

Stasjon	m	a	b	$\Delta t$	Korr.faktor
Oscarsborg	1	0.0012	0.9603	-5	0.997096
Vettre	2	-0.0678	0.9725	-3	0.997466
Steilene	3	-0.0241	0.9391	-2	0.996906
Oslo havn	4	0.0	1.0	0	1.0
Uranienborg1	5	-0.1007	0.9840	-2	0.998349
Uranienborg2	5	0.0020	0.9695	-2	0.996138

Tabell 4.1: Vannstanden som en funksjon av vannstand i Oslo havn. Vannstanden ved den aktuelle stasjonen finnes ved hjelp av formelen  $h_m = a + bh_4$ .

antall minutter etter høyvann i Oslo havn.

Vi ser av tabellen at først har vi høyvann ved Oscarsborg. To til tre minutter seinere har vi høyvann ved Steilene og Vettre. Til sist har vi høyvann ved Oslo havn. Legg merke til at også inne i Bunnefjorden kommer høyvannet før høyvannet i Oslo havn.

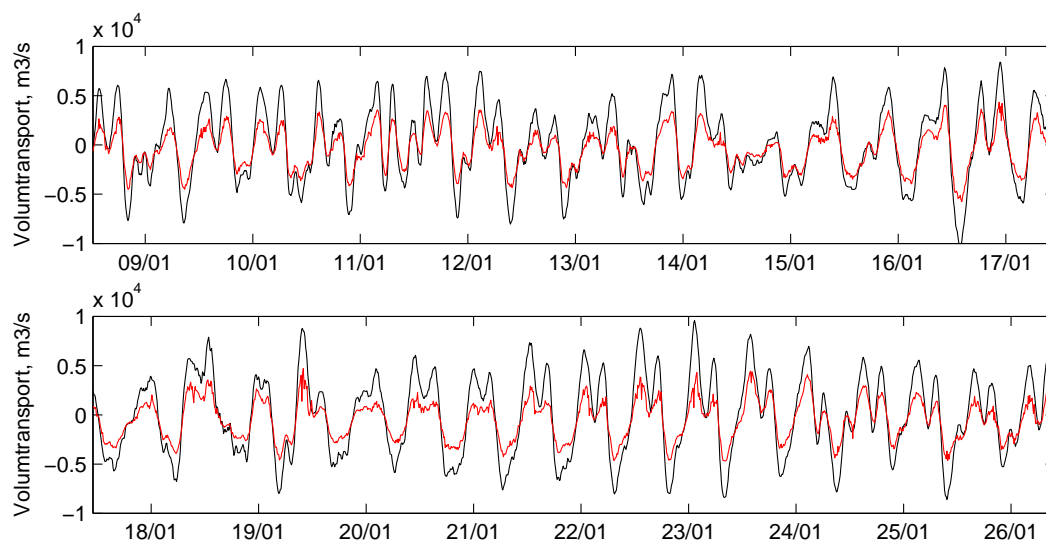
Fra tabell 3.1 på side 17 ser vi at det kun er måleren ved Uranienborg som var ute samtidig som strømmåleren, og denne ble tatt opp før strømmåleren. I tillegg har vi vannstandsdata fra Oscarsborg for den samme perioden. Vi kan bruke tabell 4.1 til å estimere vannstanden ved Vettre og Steilene. Vi kan også forlenge dataserien for Uranienborg.

### 4.1.3 Beregninger av volumtransporten

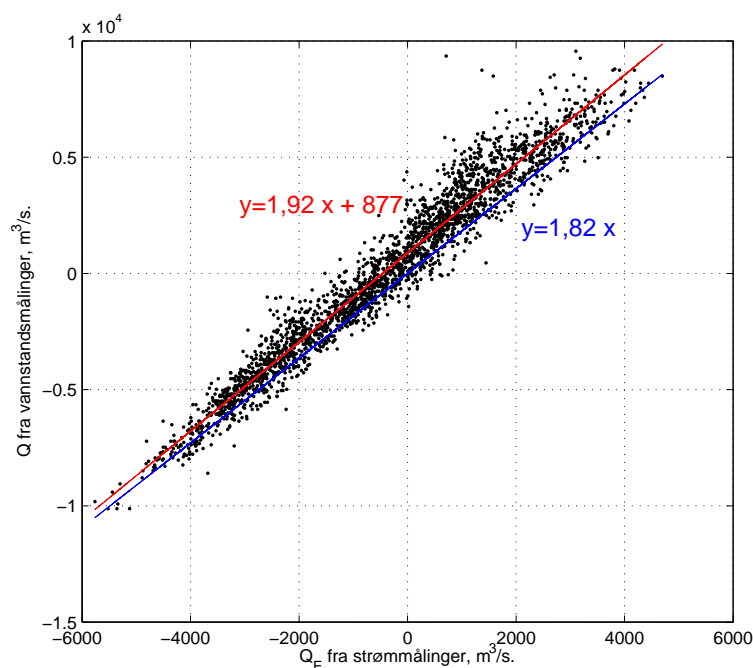
Vi har nå de dataene vi trenger for å beregne volumtransporten gjennom Drøbaksundet, utifra formlene i kapittel 2. Beregnet volumtransport utifra AWAC-målingene er vist sammen med volumtransport beregnet utifra vannstandsmålinger i figur 4.7.

Figur 4.8 viser volumtransport beregnet fra strømmålinger,  $Q_E^v$ , på  $x$ -aksen, og volumtransport beregnet fra vannstandsmålinger,  $Q^h$ , på  $y$ -aksen. Korrelasjonen mellom de to beregnede transportene er god (0,9752), men hvis vi bruker minste kvadraters metode, og krever at regresjonslinja skal gå gjennom origo, får vi at vannstandsmålingene gir 82 % høyere verdier enn strømmålingene.

Det er forventet at  $Q_E^v$  skal være mindre enn  $Q^h$ , siden den førstnevnte kun er et anslag for transporten i det østre løp, mens det sistnevnte er et anslag for transporten i både det østre og vestre løp. Hvis beregningsmetodene er korrekte, så er transporten i det vestre løp  $Q^W = 0,82Q^E$ . Det vil si at det går nesten like mye vann gjennom det vestre som det østre løp. Om dette er tilfelle skal vi drøfte i kapittel 5. Men først skal vi se på flere innsamlede data som kan hjelpe oss med dette.



Figur 4.7: Volumtransporten gjennom Drøbaksundet januar 2004. Den svarte kurven er beregnet fra vannstandsmålinger i Indre Fjord. Det er tatt hensyn til alle stasjonene i tabell 4.1. Den røde kurven er beregnet fra strømmålinger i Drøbaksundet. Endresens algoritme er blitt brukt (se kapittel 2.2.1), hvor volumtransporten er beregnet gjennom et snitt som er vridd  $11^\circ$  mot klokka i forhold til øst-vestlinja.



Figur 4.8:  $Q^v$  og  $Q^h$  plottet i et kartesisk koordinatsystem. Korrelasjonsfaktoren er 0,9752. Regresjonslinjene  $Q_E^v = 1,82Q^h$  og  $Q_E^v = 1,92Q^h + 877 \text{ m}^3/\text{s}$  er tegnet inn.

#### 4.1.4 Strømmålinger fra fartøysmontert AWAC

Da strømmåleren var fastmontert til bunnen, målte vi langs  $z$ -aksen i bare et punkt på  $x$ -aksen. Til gjengjeld fikk vi en lang tidsserie. Når strømmåleren er fastmontert til et fartøy som beveger seg langs  $x$ -aksen, får vi bare punktmålinger på tidsaksen. Disse punktene kan plottes inn i en figur tilsvarende figur 4.7.

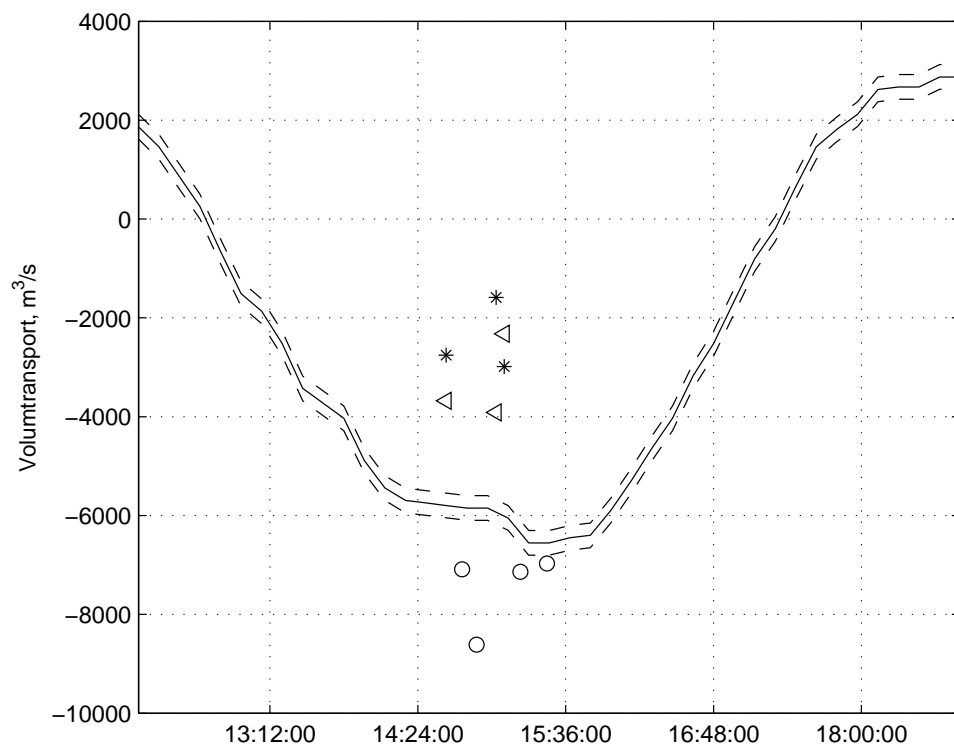
Sundet ble som nevnt tidligere krysset på to steder. Det ene snittet gikk sør for terskelen, på tvers av hele sundet (snitt B). Utifra dette kan vi beregne volumtransporten i både det østre og veste løp. Det andre snittet gikk nord for terskelen, og bare på tvers av det østre løp (snitt A). Utifra dette kan vi beregne transporten i det østre løp.

Det sistnevnte snittet omfattet posisjonen hvor den bunnmonterte strømmåleren var plassert. Utifra strømprofilen fra denne posisjonen kan transporten i det østlige løp beregnes ved hjelp av Endresens algoritme. Alle resultatene er plottet i figur 4.9.

Vi lar  $Q^h$  betegne den totale transporten i sundet beregnet utifra kontinuitetsligningen.  $Q_E^v$  er transporten i det østlige løp beregnet utifra målinger fra bunnmontert AWAC og ved bruk av Endresens algoritme.  $Q_E^A$  er transporten i det østre løp beregnet fra VMCP-målinger i snitt A, og  $Q_E^{Av}$  transporten i snitt A beregnet ved hjelp av kun en strømprofil og Endresens algoritme.  $Q^B$  er den totale transporten i sundet beregnet fra VMCP-målinger i snitt B. I tillegg A er alle symboler brukt i denne rapporten listet opp.

Snitt A ble krysset tre ganger mens strømmen var sterk (utover), og snitt B ble krysset fire ganger. Tar vi middelerdien av de målingene som er plottet opp i figur 4.9 får vi:  $Q_E^A = -3304,5 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $Q_E^{Av} = -2440,6 \text{ m}^3/\text{s}$  og  $Q^B = -7451,6 \text{ m}^3/\text{s}$ . Fra grafen i figuren kan vi lese av  $Q^h = -5840 \text{ m}^3/\text{s}$  for samme tidspunkt. Tidspunktet som er brukt er middeltiden for alle VMCP-målingene. Det må i denne forbindelse nevnes at  $Q^h$  varierte fra -5800 til -6800 i perioden hvor VMCP-målingene ble foretatt.

Vi fant tidligere at  $Q^h = 1,82Q_E^v$ , og dette gir  $Q_W = 0,82Q_E$ . Hvis vi kun benytter VMCP-målingene direkte, det vil si at vi lar  $Q^B$  og  $Q_E^A$  representere transporten i sundet får vi:  $Q_W = 1,25Q_E$ . Lar vi  $Q^h$  og  $Q_E^A$  representere transporten i sundet får vi:  $Q_W = 0,77Q_E$ . Bruker vi Endresens algoritme og lar  $Q^h$  og  $Q_E^{Av}$  representere transporten i sundet får vi:  $Q_W = 1,39Q_E$ . Vi har nå anslag som antyder at transporten i det vestre løp er alt fra 77 % til 139 % av transporten i det østre løp.



Figur 4.9: Volumtransport 10. juni 2004. Den svarte kurven er beregnet fra vannstandsmålinger. De stiplede kurvene angir et standardavvik pluss og minus i forhold til denne verdien. Målingene fra Nortek sin VMCP er plottet, trekantene markerer  $Q_E^A$ , sirklene  $Q_E^B$  og stjernene  $Q_E^{Av}$ .

## 4.2 Resultater fra frekvensanalysen

### 4.2.1 Vannstandsmålinger

Som vi så av tabell 4.1, var tidsforskjellen mellom Oslo havn og Uranienborg på -2 minutter. Her måtte vi stole på klokka i instrumentene. Hvis vi antar at tidverdiene er korrekte, så blir det neste spørsmålet om metoden som ble brukt, gir et nøyaktig resultat. Vi kan bli mer sikre på dette resultatet ved å bruke en annen metode for å finne faseforskjellen.

Vi skal sammenlikne vannstanden ved Oscarsborg og ved Uranienborg opp mot vannstanden i Oslo havn. For å finne tidsdifferansen mellom Oslo og en av de andre stasjonene, beregnes først forskjell i fasevinkel, og så finnes tidsdifferansen ved å dividere med frekvensen til den aktuelle tidevannskomponenten (4.1). Resultatet finnes i tabell 4.2, og vi ser at  $M_2$ -komponenten for Uranienborg ligger nesten 2 minutter før Oslo havn, men at usikkerheten er stor.

$$\Delta t_m = \frac{\phi_m - \phi_m^{oslo}}{\omega_m} \quad (4.1)$$

Vi hadde to måleserier for Uranienborg, en 5 dagers i desember, og en 15 dagers i januar. Disse to seriene har blitt sammenliknet med like lange og samtidige tidserier for Oslo havn og Oscarsborg. Lengden på tidserien er avgjørende for hvilke tidevannskomponenter som blir plukket ut i den harmoniske analysen. Lange tidsserier gir mange komponenter.

Ved Uranienborg må vannstandsmåleren ha blitt flyttet av bølgene ved et tidspunkt. Det var et tydelig hopp i vannstanden den 16. januar 2004 på 6 cm. Dette ble det korrigert for. Maksimal vind var bare 5,1 m/s denne dagen, men middelvannstanden var relativt lav. Det er viktig ved utplassering av vannstandsmålere, at de blir plassert dypt nok slik at de ikke blir påvirket av overflata.

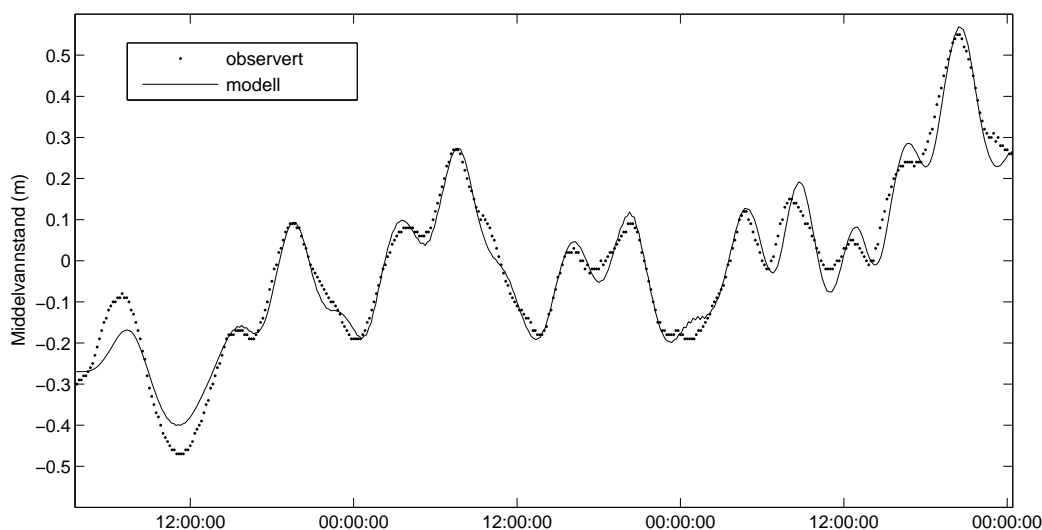
I desember var  $M_2$ ,  $M_6$ ,  $3MK_7$  og  $M_8$  signifikant for Oscarsborg,  $M_2$ ,  $M_4$ ,  $2MK_5$  og  $3MK_7$  var signifikante for Oslo havn og  $M_2$  og  $M_4$  var signifikante for Uranienborg.

I januar var  $MSf$ ,  $O_1$ ,  $M_2$ ,  $2MS_6$  og  $M_8$  signifikant for Oscarsborg,  $MSf$ ,  $M_2$  og  $2MS_6$  var signifikante for Oslo havn og  $MSf$ ,  $M_2$  og  $2MS_6$  var signifikante for Uranienborg.

I tillegg B fins frekvensspektra for vannstand- og strømmålingene. En metode for beregning av frekvensspektra ved hjelp av autokovariansfunksjonen fins også her.

$M_2$ $\phi^\circ$ a (cm) $\Delta t$ (min)	Oscarsborg (des) 141,64 $\pm$ 17,40 16,59 $\pm$ 5,14 -5,96	Oslo havn (des) 144,52 $\pm$ 17,23 17,62 $\pm$ 5,55	Uranienborg (des) 143,69 $\pm$ 16,47 17,45 $\pm$ 5,24 -1,72
$MSf$ $\phi^\circ$ a (cm) $\Delta t$ (min)	Oscarsborg (jan) 320,69 $\pm$ 12,46 20,35 $\pm$ 4,26 -38,98	Oslo havn (jan) 320,03 $\pm$ 11,01 20,54 $\pm$ 4,22	Uranienborg (jan) 320,22 $\pm$ 13,34 18,74 $\pm$ 4,48 -11,22
$M_2$ $\phi^\circ$ a (cm) $\Delta t$ (min)	Oscarsborg (jan) 22,55 $\pm$ 18,04 13,10 $\pm$ 4,31 -4,74	Oslo havn (jan) 24,84 $\pm$ 16,62 13,94 $\pm$ 4,51	Uranienborg (jan) 24,05 $\pm$ 18,26 14,04 $\pm$ 4,02 -1,64
$2MS_6$ $\phi^\circ$ a (cm) $\Delta t$ (min)	Oscarsborg (jan) 8,51 $\pm$ 39,11 0,88 $\pm$ 0,48 -4,33	Oslo havn (jan) 14,86 $\pm$ 38,50 1,73 $\pm$ 1,01	Uranienborg (jan) 11,25 $\pm$ 38,53 1,72 $\pm$ 1,00 -2,46

Tabell 4.2: Resultatet fra den harmoniske analysen. For perioden 16.-21. desember 2003 er bare  $M_2$ -komponenten tatt med. For perioden 7.-22. januar 2004 er  $MSf$ ,  $M_2$  og  $2MS_6$  tatt med. Grunnen til dette er at programpakken  $T\_TIDE$  plukker ut flere harmoniske konstanter når tidsseriene blir lengre. Feilintervallet er gitt med 95 % sannsynlighet.



Figur 4.10: Målt og beregnet vannstand i Oslo havn i perioden 9. til 12. januar 2004.

### 4.3 Resultat fra modellsimuleringa

Nå skal vi se på resultatene fra kjøringen av den numeriske simuleringssmodellen.

#### 4.3.1 Vannstanden inni fjorden

Kjøringen startet mens det var lavvann ved Filtvedt, omtrent klokka 03:00 9. januar. Nullnivået ble lagt ved  $-0,27\text{ m}$  slik at det skulle være minimal differanse mellom vannstanden ved Filtvedt, og startbetingelsen for modellen. I løpet av 24 timer hadde løsningen svingt seg inn til normal størrelse. Figur 4.10 viser vannstanden for Oslo havn. Feltmålingene sammenliknes med de beregnede data. I den tidevannsperioden som ble analysert, er det maksimale avviket mellom modell og måling  $5,7\text{ cm}$ . Dette er en typisk tidevannsperiode, hvor vi ser en knekk på stigende vann. Denne knekken ble observert av Tryggestad (1974), som forklart den som et resultat av de genererte harmoniske undersvingningene til tidevannet som oppstår når disse kommer inn på grunt vann. Det kan også nevnes at denne knekken typisk oppstår når det er ny- eller fullmåne. Det var nymåne 7. januar 2004.

I tillegg D finnes konturlinjene til vannstanden plottet for hver time i den samme perioden. Den største romlige variasjonen i Indre Fjord var på  $6,4\text{ cm}$ , som er av samme størrelsesorden som avviket mellom modellberegninger og observasjoner.

#### 4.3.2 Volumtransporten

I modellkjøringa med høyest oppløsning ble volumfluksen gjennom Drøbak-sundet delt opp i to deler. Vi kan bruke minste kvadraters metode til å se på



sammenhengen på transporten i det østre og vestre løp. Minste kvadraters metode gir

$$Q_W = 0,0907Q_E - 9,0345 \quad (4.2)$$

Korrelasjonsfaktoren er 0,7638 mellom de to transportene. Utfra modellen utgjør transporten i det vestre løp omtrent 10 % av transporten i det østre.

## 4.4 Detaljer i målingene

De detaljerte strømmålingene som er gjort i forbindelse med denne oppgaven, avslører en del forhold ved vannets bevegelse over Drøbakerskelen. Vi skal fort se på to forhold:

- Strømmens lagdeling.
- Virveldannelse.

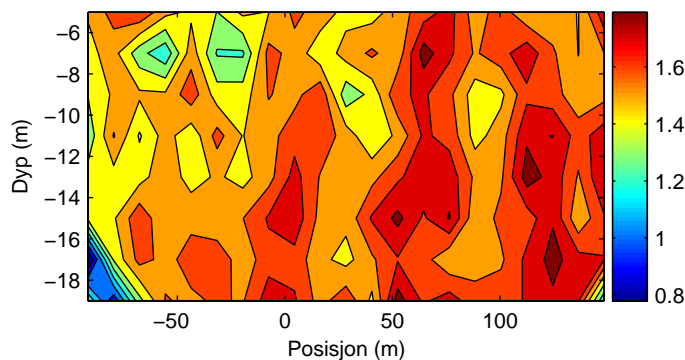
### 4.4.1 Strømmens lagdeling

I tillegg B er isovelene til alle strømmålingene fra den bunnmonterete AWACen plottet som funksjon av dypet og tiden. Innstrømning og utstrømning henger nøye sammen med middelvannstanden og det atmosfæriske trykket som er tegnet opp i figur 4.6 på side 41.

I perioden 9. til 12. januar stiger middelvannstanden. Det er netto mer innstrømning enn utstrømning. Annenhver utstrømningsperiode viskes nesten ut, og i begynnelsen har vi bare en svak strøm ut i overflata, og innstrømning dypere ned. Etterhvert snur det og det er hovedsakelig inngående strøm i overflata, utgående strøm nær bunn.

I perioden 13. til 16. januar synker middelvannstanden i takt med at det atmosfæriske trykket stiger. Det kommer en sterk utstrømning den 15. og 16., hvor det nesten ikke forekommer inngående strøm i noe dyp. Det kommer bare et lite gulp annenhver tidevannsperiode.

Fra 20. til 22. januar synker middelvannstanden kraftig, og det er en sterk lagdeling av strømmen. Det er utstrømning i overflata og innstrømning nær bunn. Dette snur den 23. hvor vi får innstrømning i overflata. Lagdelingen varierer altså sterkt i perioden 9. - 22. januar.



Figur 4.11: *Strømmålinger gjort med VMCP over terskelen.*

#### 4.4.2 Virveldannelse

Hvis man ikke midler VMCP-målingene over minst 20 sekunder, vil strømvektorene bli ustabile. Figur 4.11 viser nordkomponenten av strømmen i det østlige løp. Målingene er midlet over 5 sekunder, som tilsvarer at man får en strømmåling omtrent hver 12. meter langs TB sin kurslinje. Det ser ut som om strømmen er vekselvis sterk og svak, og at denne variasjoene strekker seg fra overflata og et godt stykke ned i vannet.

Dette kan tolkes som virvler som beveger seg i par nedover med strømmen. Virvlene har diameter på 20 til 25 meter, og strekker seg ned mot bunnen. Dette kan passe med egne visuelle observasjoner over terskelen. Disse variasjonene kan selvfølgelig også være støy.

## Kapittel 5

# Analyse

### 5.1 Formulering av hovedproblemet

Endresen kom fram til at forholdet mellom transporten i det østlige løp og den totale transporten i sundet beregnet fra vannstandsendinger i Oslo havn, var  $Q_E/Q \approx 0,47$ . AWAC-målingene fra oktober 2001 ga et forhold  $Q_E/Q \approx 0,33$ , når samme beregningsmetode blir brukt. Strømmålingene fra samme AWAC men fra desember 2002, ga  $Q_E/Q \approx 0,08$ . AWACen utplassert med hjelp av NIVA, i januar 2004, ga  $Q_E/Q \approx 0,46$  når vi ser bort i fra konstantleddet.

Resultatene til Endresen blir altså reproduisert i målingene fra januar 2004, mens måleseriene fra den første AWACen gir et lavere forholdstall.

Kystverkets måler ble tatt opp fordi riggen den sto i var ødelagt. Det er sannsynlig at måleren ikke var i loddrett posisjon, og at dette kan forklare de lave strømmålingene. Jeg velger derfor å se bort ifra disse målingene. Målingene fra desember 2002 er helt sikkert feilaktige, men det er ikke like sikkert at målingene fra oktober 2001 er feilaktige, siden ingen observerte måleren i måleperioden. Disse målingene ser jeg bort i fra fordi jeg antar at det er umulig at det strømmer dobbelt så mye vann i det vestlige løp som i det østlige.

Hvis vi nå ser bort i fra målingene fra Kystverkets måler, gir resultatet til Endresen og mitt eget resultat at den totale transporten er dobbelt så stor som transporten i det østlige løp. Dette antyder at transporten i det vestlige løp skulle være av samme størrelsesorden som transporten i det østlige løp. Hvordan kan dette være tilfelle når tverrsnittarealet kun er en tiendel?

Endresen tenkte seg at vannstanden varierte lineært mellom Oscarsborg og Oslo havn, og at man da kunne dividere den totale transporten beregnet fra vannstandsendinger i Oslo havn på to. For at man skal kunne gjøre det, må man anta at vannstandsendingene er betydelig mindre ved Oscarsborg enn i Oslo havn. Dette er ikke tilfelle. Vannstandsendingene er bare omkring 5 % mindre ved Oscarsborg.

Mulige forhold som kan forklare problemet:

- feil i kalibrering av instrumentene
- forskjell i vannstandsendringer i Indre Fjord
- feil i fjordareal
- forhold knyttet til at strømmen ikke har hovedretning rett nord/rett syd gjennom sundet
- at anslaget for transporten i det østlige løp er underestimert
- at det renner mer vann i det vestlige løp enn før antatt

Det instrumentet Endresen brukte i sitt hovedfagsarbeid, UCM-40, ble kalibrert ved å trekke instrumentet gjennom vannet en kjent strekning. Det ble slått fast at instrumentet hadde en tilfredstillende målenøyaktighet (Endresen, 1995).

AWACen har blitt kalibrert av Nortek AS. Dette har blitt gjort ved at instrumentet har blitt dratt gjennom en tank med nøyaktig kjent hastighet.

Disse to instrumentene som har blitt kalibrert hver for seg og funnet gode nok og som fungerer på to forskjellige måter har uavhengig kommet fram til samme resultat. Dette skulle være en god indikasjon på at kalibreringen av instrumentetene skulle være tilfredstillende.

Fjordarealet beregnet i denne oppgaven er 2 % mindre enn det fjordarealet Endresen brukte (beregnet av Munthe-Kaas). Dette bidrar til at den totale transporten blir mindre. Deles fjorden opp i fem delarealer med tilhørende vannstandsendringer, blir transporten 5 % mindre. Dreies hovedretningen  $11^\circ$  mot klokka, blir anslaget for  $Q_E$  5 % større.

For å finne summen av de forskjellige faktorene, har minste kvadraters metode blitt brukt til å finne  $Q^h$  som funksjon av  $Q_E$ . Dette gir når nevnte forhold er rettet opp i

$$Q_W = 0,92Q_E + 877 \quad (5.1)$$

Dette er det samme som vi ser i figur 4.8 på side 43. Snur vi på de to variablene, og beregner  $Q_E$  som funksjon av  $Q^h$ , får vi

$$Q_W = 1,01Q_E + 9190 \quad (5.2)$$

Vi sitter altså fortsatt igjen med  $Q_W \approx Q_E$ , selv etter at vi har justert fjordareal og retning, og tatt høyde for forskjeller i fase og amplitude ved å dele opp Indre Fjord.

## 5.2 Vi går kontinuitetsligningen etter i sømmene

Siden kontinuitetsligningen er så viktig for denne oppgaven, går vi gjennom tankegangen bak utledningen. Vi tenker oss et lite flateelement i Indre Fjord, som er så lite at vi kan anta at vannstanden er konstant over arealet  $dF$ . Volumet av vannsøylen under flateelementet blir  $dF(H_0 + h)$ , hvor  $H_0 + h$  er vanndypet på stedet. Endringen av volumet per tidsenhet,  $dt$ , blir

$$dF \frac{dh}{dt}$$

Hvis vi som i kapittel 3.3 lar  $(U, V) = H(\bar{u}, \bar{v})$ , hvor  $\bar{u}$  og  $\bar{v}$  er de dybdeintegreerte strømhastighetene, blir netto volumfluks inn i området (vi lar posisjonen til det nedre venstre hjørnet være  $(x, y)$ )

$$-(V(x, y + dy) - V(x, y)) dx - (U(x + dx, y) - U(x, y)) dy$$

Netto volumfluks inn i vannsøylen må være lik volumendringen per tidsenhet. Setter vi disse to uttrykkene lik hverandre og deler på  $dF$ , får vi kontinuitetsligningen på samme form som ligning 3.12 på side 32, hvis vi lar  $dx$  og  $dy$  bli infinitesimalt små.

Ser vi på flere celler som ligger inntil hverandre istedenfor bare en, ser vi at volumfluks ut av en celle må være lik volumfluks inn i nabocella. Summen av  $dF \frac{dh}{dt}$  for alle cellene må være lik fluksen gjennom randen. Ved kysten er fluksen null. Summerer vi alle cellene i et estuar, vil dette balansere volumfluksen gjennom de åpne rendene.

Antar vi nå at vannstanden innenfor Drøbak er konstant i rommet, får vi kontinuitetsligningen på formen  $Q = F \frac{dh}{dt}$ . Antar vi videre at  $Q \propto \sin \omega t$ , får vi  $h \propto \cos \omega t$ . Volumtransporten, og dermed også strømmen i Drøbaksundet, er da i motfase med vannstanden inne i fjorden.

Deler vi Indre Fjord inn i flere områder, åpner vi for at det kan være faseforskjeller mellom volumtransporten og vannstandsendingene. Deler vi fjorden inn i to like store arealer, kan vi ha at

$$\frac{F}{2} \frac{dh_1}{dt} \propto \sin(\omega t + \phi)$$

og

$$\frac{F}{2} \frac{dh_2}{dt} \propto \sin(\omega t - \phi).$$

### 5.2.1 Et regneeksempel

Vi antar at transporten i det vestre løp er 30 % av transporten i det østlige. Dette er et litt større anslag enn hva som tidligere er antatt (10 - 20 %) utifra tverrsnittarealet i de to løpene, men en god del mindre enn målingene våre tilsier. Vi innfører en ønsket transport utifra dette

$$Q^* = 1,3Q_E \quad (5.3)$$

Videre antar vi at vårt anslag for transporten i det østlige løp er korrekt. Vi har da at

$$Q^{h_4} = 1,9Q_E \quad (5.4)$$

hvor  $Q^{h_4}$  er volumtransporten beregnet fra vannstandsendinger i Oslo havn. Vi får  $Q^* = 0,68Q^{h_4}$ .

Hvis vi deler inn fjorden i to like store arealer, hvor stor må  $\phi$  være for at volumtransporten skal reduseres til 68 %? Siden  $\sin(\omega t)$  har et maksimum når  $\omega t = \pi/2$  får vi:

$$\frac{1}{2} \left( \sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \right) = 0,68$$

Dette gir  $\phi \approx 0,8 \text{ rad}$ . Med  $\omega = 1,405 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$  ( $M_2$ -frekvensen), tilsvarer dette 1 time og 35 minutter. Det må altså være mer enn 3 timer forskjell i fase for å få redusert  $Q$  til 68 %. Slike faseforskjeller finner vi ikke igjen i måledataene, men forskjellen kan for enkelte perioder være 20 minutter. Dette utgjør en reduksjon av  $Q$  til 99,6 %.

Setter vi opp kontinuitetslikningen slik vi har brukt den med alle ledd får vi

$$Q = F_1 \frac{dh_1}{dt} + F_2 \frac{dh_2}{dt} + F_3 \frac{dh_3}{dt} + F_4 \frac{dh_4}{dt} + F_5 \frac{dh_5}{dt} \quad (5.5)$$

Våre måledata viser at faseforskjellen mellom de forskjellige vannstandsmåleseriene ikke er større enn noen minutter, og vi har sett at dette ikke vil redusere anslaget for volumtransporten noe særlig. Vi skal nå se på hvordan amplituden til vannstandsmålingene påvirker resultatet.

Vi setter opp et regnestykke for å anslå hvor små amplitudene må være for å oppnå at  $Q$  skal reduseres til 68 %.

$$F_1 a_1 + F_2 a_2 + F_3 a_3 + F_4 a_4 + F_5 a_5 = r F a_4$$

hvor  $a_m$  er amplituden til de fem stasjonene, og  $r$  er reduksjonsfaktoren som vi ønsker skal være 0,68. Vi deler på amplituden til Oslo havn, og innfører  $b_m = \frac{a_m}{a_4}$

$$\frac{F_1 b_1 + F_2 b_2 + F_3 b_3 + F_4 + F_5 b_5}{F} = r$$

Som et eksempel setter vi  $b_1 = 0,9$ ,  $b_2 = 0,9$ ,  $b_3 = 0,5$  og  $b_5 = 0,5$ . Vi får da  $r = 0,74$ . Det skal altså ganske store reduksjoner i amplitudene for å få en tilstrekkelig lav reduksjonsfaktor. Setter vi  $b_1 = 0,96$ ,  $b_2 = 0,97$ ,  $b_3 = 0,94$  og  $b_5 = 0,97$  slik måledataene tilsier, får vi  $r = 0,97$ .

### 5.2.2 De styrende kreftene

I dette delkapittelet skal dynamikken i problemet beskrives. For vårt formål kan vi definere dynamikk som sammenhengen mellom vannets bevegelse og de kreftene som virker. Hvilke krefter kan sette opp bevegelser som forårsaker faseforskjeller og amplitudeforskjeller?

Det er bevegelsesligningen som beskriver kreftene som styrer bevegelsene i kontinuitetsligningen. I oseanografi er det vanlig å betrakte en passe stor vannpakke. Den relative akselerasjonen til denne vannpakka må være lik summen av kreftene som virker på den.

De kreftene som virker:

- Corioliskrefter
- Tyngdekrefter
- Tidevannskrefter
- Trykkrefter
- Friksjonskrefter

Corioliskrafta er kun en styrende kraft, som uttrykker at vi befinner oss i et roterende referansesystem. Corioliskrafta hverken tapper eller tilfører energi til systemet.

Tyngdekraftene, tidevannskraftene og trykkraftene samspiller. Hvis det kun sees på krefter i horisontal retning, vil ikke tyngdekrafta bidra til akselerasjonen, hvis tetthetsflatene er horisontale. Er ikke tetthetsflatene horisontale, ved at for eksempel overflata heller, vil det settes opp trykkrefter. Endresen (1995) gjorde anslag for kreftene. Den direkte tidevannskrafta og trykkraft-er på grunn av atmosfæriske trykkgradienter lå en størrelsesorden under de andre leddene i Oslofjorden. I tidevannsmodeller blir tidevannskrafta uttrykt ved at vannflata svinger opp og ned ved rendene, og det settes da opp trykkrefter. Tidevannskrafta er da det viktigste (eller det eneste) kildeleddet for energi til systemet.

Til sist har vi friksjon. Dette er krefter som enten tapper eller tilfører energi til systemet. Bunnfriksjon som skyldes bunnens ruhet, vil overføre energi til turbulens eller varme i et tynt grenselag langs bunnen. Formfriksjon som skyldes bassengets topografi og geometri, vil overføre energi til virvler av stor skala i bassenget (Stigebrandt, 2002). I modeller blir denne krafta uttrykt ved at vannet ikke kan passere gjennom de faste rendene, og at vannedybden inngår i ligningssystemet. Ved terskelers kan det oppstå indre bølger hvis fjorden er lagdelt. Energi kan da overføres til svingninger mellom de to lagene. Dette kan kalles intern bølgefriksjon, og virker dempende på svingninger på overflata (Stigebrandt, 2002).

Det kan også være intern friksjon i væsken, som skyldes skjærkrefter mellom de enkelte vannpakkene. Denne friksjonskrafta uttrykkes på formen  $A_v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

hvor  $A_v$  er en eddyviskositet. Disse kreftene vil tappe energi, og slike ledd brukes ofte i numeriske modeller til å dempe ufysiske svingninger.

Ved overflaten kan vi ha betydelig vindfriksjon. Vinden vil tilføre energi, og kan være med på å sette opp stående svingninger i delvis lukkede basseng.

### 5.2.3 Hvordan endres vannstanden inni fjorden?

I en fjord uten friksjon vil en progressiv bølge som brer seg innover bli reflektert innerst og bre seg utover og møte den inngående. Disse to progressive bølgene vil addere seg til en stående svingning, hvor vannstanden vil være i fase i hele fjorden og amplituden vil øke innover og være størst innerst (Aas, 1983).

Friksjonen vil svekke bølgebevegelsen hele veien, så vi vil da ikke få en rein stående svingning, men en blanding av en stående og en progressiv svingning. I følge Tryggestad (1974) har tidevannsbølgen i Oslofjorden mer karakter av en progressiv bølge enn en stående. Men som vi har sett er ikke amplitude og faseforskjellene store i Indre Fjord. Generelt kan vi si at vi har en stående bølge som er modifisert av friksjon og fjordens geometri.

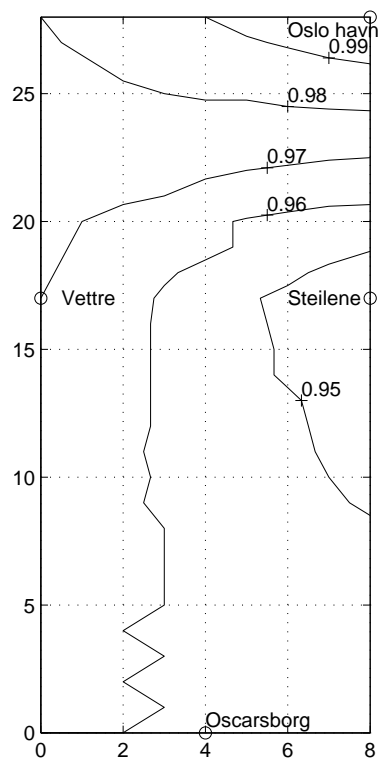
Hvordan varierer vannstandsamplituden i Indre Fjord? Følger vi den vestre siden av Vestfjorden innover mot Oslo havn, så øker amplituden jevnt innover. Dette er som forventet hvis man har en stående svingning. Høyvannet kommer 2 minutter seinere ved Vettre og 5 minutter seinere i Oslo havn enn ved Oscarsborg. For en stående svingning vil vannstanden være i fase overalt, men på vestsiden er bølgen litt forsinket, noe som kjennetegner en progressiv bølge.

Følger vi østsiden av Vestfjorden, blir forholdene mer kompliserte. Vannstandsmålingene viser at amplituden har et minimum ved Steilene. Forutsatt at målingene er korrekte, så tyder dette på at vannvolumet som passerer på østsiden er mindre enn på vestsiden. Det kan være svingninger som går på tvers av fjorden.

For å illustrere hvordan amplituden endrer seg, har jeg lagd en enkel skisse av Indre Fjord, og interpolert lineært, og deretter tegnet konturlinjer, figur 5.1. Tabell 4.3 viser at den største forskjellen i amplitude er mellom Steilene og Oslo havn. Amplituden ved Steilene er 3,4 % mindre enn amplituden ved Vettre. Ved harmonisk analyse, finner man først energien på visse frekvenser ( $M_2$  osv), så trekker man disse fra tidsserien. Deretter regner man energien rundt hver komponent for å finne støynivået. Ved å foreta harmonisk analyse på differansen mellom vannstanden ved Vettre og Steilene, kommer  $2MK_5$  og  $M_6$  tydelig fram godt over støynivået.

Forskjellen mellom vannstandsmålingene ved Vettre og Steilene er maksimalt 9,8 cm. Forskjell i gjennomsnittverdi for de to måleseriene er 4,4 cm. Vi har altså ihvertfall en forskjell på 5,4 cm. Vi beregner hva denne forskjellen utgjør i krefter. Avstanden mellom Steilene og Vettre er 6940 m.





Figur 5.1: Amplituden i forhold til amplituden ved Oslo havn. Lineær interpolasjon er brukt mellom stasjonene i en forenklet modell av Indre fjord. Enhetene langs aksene er km.

Dato	Maksvind (m/s)	Midlet vind (m/s)
7. des	4,6	1,2
8. des	5,1	1,0
9. des	2,6	1,4
10. des	6,7	4,1
11. des	6,7	3,1
12. des	5,7	1,9
13. des	4,6	2,4

Tabell 5.1: Vind målt ved Blindern desember 2003.

$$g \frac{\partial h}{\partial x} = 7,6 \cdot 10^{-5} m/s^2 \quad (5.6)$$

Kan dette ha blitt forårsaket av vind? Tabell 5.1 viser vinden i måleperioden. Vindspenningen kan beregnes utifra følgende formel

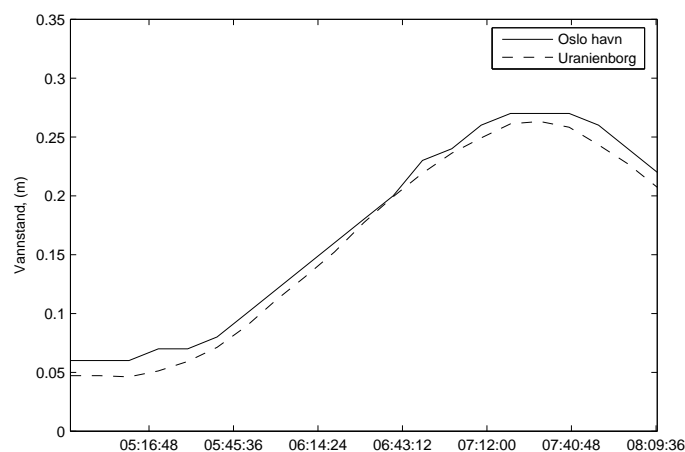
$$\tau_s = \rho_A K_{10} W_{10}^2 \quad (5.7)$$

hvor luftas tetthet er  $\rho_A = 1 kg/m^3$  og  $W_{10}$  er vindhastigheten i  $m/s$  målt i 10 meters høyde. I følge Pond og Pickard (1978) er dragkoeffisienten  $K_{10}$  omkring  $1 \cdot 10^{-3}$  når  $W_{10} \approx 7 m/s$ . I følge Bye og Wolff (2004) ligger  $K_{10}$  på  $1,2 \cdot 10^{-3}$  når  $W_{10} \approx 7 m/s$ . Vindkraften fåes ved å dele vindspenningen på vanddypet og vannets tetthet. Den maksimale vindkraften vi kan få ligger da på  $0,9 - 1,1 \cdot 10^{-5} m/s^2$ . Vindkraften er nesten en størrelsesorden mindre enn trykkreftene. Det må nevnes at det ikke er sett på data om retningen til vinden.

I modellberegningene, hvor lokal akselerasjon er balansert mot trykkrafta på grunn av overflatens helning, Corioliskrafta og bunnfriksjon, får vi også forskjeller på tvers av fjorden. Men differansen mellom vannstanden ved Vettre og Steilene blir aldri større enn  $2,5 mm$  i den tidevannsperioden som er analysert. Og amplituden for Steilene er større enn for Vettre. Dette kan forklares som Corioliskraftas virkning. Indre friksjon vil bare dempe svingningene, og kan ikke forårsake de observerte verdiene. Det ville vært interessant å få kjørt den numeriske modellen med høyere oppløsning og med vindpådrag, for å se om modellen kunne produsert de observerte forskjellene mellom Vettre og Steilene. Det hadde også vært interessant å se på virkningen av konvektiv akselerasjon.

Høyvann inne i Bunnefjorden inntreffer 2 minutter før høyvann i Oslo havn. Hvordan kan vi forklare dette? Først kan vi se litt på beregningene av faseforskjellen. Den harmoniske analysen ga en faseforskjell på  $-1,7 \pm 34$  minutter for  $M_2$ -komponenten. Jeg tolker dette slik at faseforskjellen er - 2 minutter i gjennomsnitt, men at den på de enkelte tidspunkter varierer sterkt fra dette. Vi kan si at i enkelte tilfeller inntreffer høyvannet før i Bunnefjorden enn i Oslo havn. Figur 5.2 viser et slikt tilfelle. Vannstanden ved Uranienborg følger vannstanden i Oslo havn opp mot høyvann, og så snur det ved Uranienborg litt før Oslo havn. Vannet som renner ut av Bunnefjorden, renner inn i havnebassenget og gjør at vannstanden fortsetter å stige her en liten stund.

Den numeriske modellen gir at vannstanden ved Uranienborg er faseforskjøvet mindre enn et minutt i forhold til vannstanden ved Oslo havn. Men høyvannet kommer litt før inni Bunnefjorden. Vi ser av tabell 5.2 at amplituden til vannstanden øker hele veien inn i fjorden, også forbi Oslo havn og inn i Bunnefjorden. Modellen viser at vi har en bølge som er påvirket av Corioliskraften og topografi.



Figur 5.2: Vannstanden ved Uranienborg og Oslo havn morgenen den 10. januar 2004.

Stasjon	m	a	b	$\Delta t$	Korr.faktor
Vettre	2	0.0034	0.9867	0	0.999423
Steilene	3	0.0031	0.9881	-1	0.999534
Oslo havn	4	0.0	1.0	0	1.0
Uranienborg	5	-0.0003	1.0011	0	0.999983

Tabell 5.2: Resultater fra modellberegningene. Vannstanden som en funksjon av vannstand i Oslo havn.

m	$\sigma$ (rad/s)	$\sigma^*$ (rad/s)
1	$2,3 \cdot 10^{-3}$	$4,6 \cdot 10^{-5}$
2	$4,6 \cdot 10^{-3}$	$9,2 \cdot 10^{-5}$
3	$6,7 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$
4	$9,3 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-4}$
5	$1,1 \cdot 10^{-2}$	$2,3 \cdot 10^{-4}$

Tabell 5.3: *Eigenfrekvenser.*

### 5.2.4 Hvilke frekvenser gir bassengets geometri?

Hvis vi har et lukket basseng med lengde  $L=30$  km og dyp  $H=50$  meter, kan vi få egensvingninger med bølgelengde  $\lambda = \frac{2L}{m}$ , og frekvens

$$\sigma = m \frac{\pi \sqrt{gH}}{L}$$

hvor  $m=1,2,3\dots$

Tenker vi oss en indre bølge mellom to lag med  $\rho_1 = 1024$  kg/m<sup>3</sup> og  $\rho_2 = 1026,5$  kg/m<sup>3</sup>, hvor sprangsjiktet ligger på 8 meter, får vi frekvensen

$$\sigma^* = m \frac{\pi \sqrt{g^* H^*}}{L}$$

hvor  $g^*$  er den reduserte tyngden og  $H^*$  er tykkelsen av det øverste laget.

Tabell 5.3 viser frekvensene. Egensvingningene på overflata er for raske til at de kan bli funnet igjen i frekvensanalysen. De indre svingningene kan derimot gi frekvenser tilsvarende tidevannskomponentene. Med tanke på videre arbeid ville det vært interessant å se på om det finnes indre bølger med slike frekvenser.

## 5.3 Transporten i Drøbaksundet

I den foregående analysen av kontinuitetsligningen kom det fram at den deriverte av vannstanden må gi et godt anslag for volumtransporten. Her skal beregningen av volumtransporten utifra strømmålinger diskuteres.

### 5.3.1 Forholdet mellom den reelle og den profilbaserte transporten

Vi skriver som tidligere forholdet mellom den reelle transporten i det østre løp og den profilbaserte transporten

$$\alpha = \frac{Q_E}{Q^p}$$

Her har vi sett bort i fra konstantleddet. Aas og Endresen (1999) kom fram til  $\alpha = 0,67$  for Drøbaksundets østlige løp. Andre sund med større tverrsnittareal hadde forholdstall helt opp til 0,85.

Før vi går videre må vi se på hvilke verdier som er blitt brukt som tverrsnittareal. Endresen brukte et tverrsnittareal på  $8190 \text{ m}^2$ . Hvis dette vris  $11^\circ$ , blir tverrsnittarealet  $8340 \text{ m}^2$ . Utifra kartdata ble tverrsnittarealet beregnet på nytt. Resultatet ble da  $9190 \text{ m}^2$ . Brukes dette resultatet vil den profilbaserte transporten bli 10 % større. Hvis forholdstallet  $\alpha$  holdes konstant, vil også den reelle transporten i det østre løp bli 10 % større.

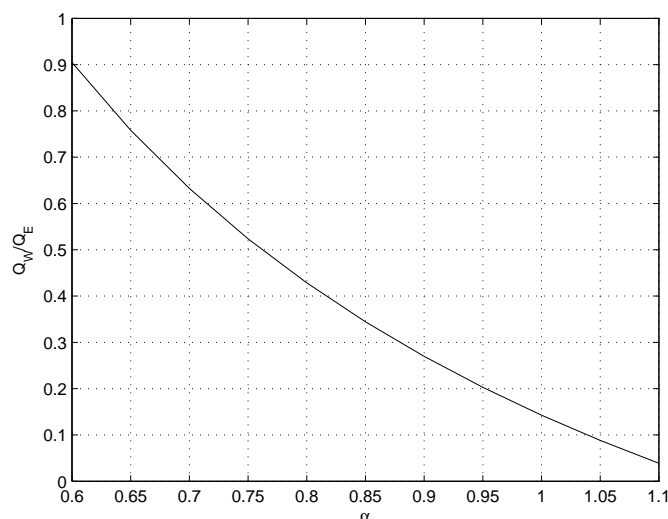
Figur 5.3 viser forholdet mellom transporten i det vestlige og østlige løp som funksjon av  $\alpha$ . Aas og Endresen (1999) kommer i konklusjonen fram til at volumtransporten kan estimeres med 20 % nøyaktighet, ved å bruke  $\alpha = 0,7$ . Legger vi til 20 % til 0,7 får vi da en øvre grense som blir 0,84. Brukes dette forholdstallet sammen med de nye delarealene får vi

$$Q_W \approx 0,36Q_E$$

Dette er det laveste anslaget for transporten i det vestlige løp, men vi må fortsatt spørre oss om det kan renne så mye vann over jeteen? Personlig har forfatteren dykka helt vest i sundet oppå jeteen, og har smertelig erfart at strømmen er sterk helt ned til terskeldypet. Forfatteren har også personlig observert meget sterke strømmer over jeteen i forbindelse med feltarbeid. Dette er ikke kvantifisert på noen måte, men det er observert at navigasjonsstakene blir dratt helt under vann når strømmen er som sterkest. For at transporten i det vestlige løp skal komme ned mot det vi forventer (10-20 %), må  $\alpha$  økes opp mot 1.

### 5.3.2 Hva sier VMCP-målingene?

Når det gjelder totaltransporten, så ga VMCP-målingene i snitt B litt høyere verdier enn totaltransporten beregnet fra vannstandsendringer (figur 4.9 på side 45). Ser vi bort ifra den aller høyeste VMCP-målingen, så kan vi si at de to målemetodene gir resultater som ikke ligger veldig langt utenfor hverandres feilgrenser, og at VMCP-målingene støtter beregningene fra vannstandsendringer. Den målte totale transporten er i hvertfall ikke mindre enn det



Figur 5.3: Forholdet mellom transporten i det vestlige og det østlige løp som funksjon av  $\alpha$ . Minste kvadraters metode er brukt for å finne forholdet  $Q_W/Q_E$ , hvor konstantleddet har blitt sett bort i fra. Ved  $\alpha = 0,7$  er  $Q_W/Q_E = 0,63$ . Ved  $\alpha = 1$  er  $Q_W/Q_E = 0,14$ .

vannstandsendingene skulle tilsi.

Beregnes forholdet mellom den reelle transporten i det østlige løp og den profilbaserte transporten fra VMCP-målinger, får vi  $\alpha \approx 0,9$ . Dette er betydelig høyere enn tidligere, men det statistiske grunnlaget er mye dårligere (tre målinger) enn det Endresen hadde.

Ser vi bort i fra den høyeste målingen i snitt B, og den laveste målingen i snitt A, får vi

$$Q_W = 0,75Q_E$$

VMCP-målingene antyder altså svært stor transport i det vestlige løp.

### 5.3.3 Diskusjon

Det kan tenkes at kurven for  $Q_W$  er 'breiere' i tid enn kurven for  $Q_E$ . Det vil si at de sterke strømmene ut og inn over jeteen varer lengre enn de sterke strømmene i sundets østlige løp. Arealet under kurven for en halv tidevannsperiode, som utgjør den totale innstrømningen, vil da bli større.

Den numeriske simuleringsmodellen med 100 meters oppløsning, ga  $Q_W = 0,1Q_E$ , som antagelig er alt for lite. Men modellen ga et annet interessant resultat.  $Q_W$  er faseforskjøvet i forhold til  $Q_E$ . Transporten i det vestlige løp henger opp til en time etter transporten i det østlige. Grunnen til at modellen gir en lav transport i det vestlige løpet, kan være at topografien over terskelen er for dårlig oppløst, eller at modellen ser bort i fra konvektiv

akselerasjon, som i Drøbaksundet slett ikke er ubetydelig, (Endresen, 1995).

Volumtransport over jeteen på tvers av sundet mellom det vestlige og østlige løp, kan gi stor transport i den vestlige delen av det østlige løp. Dette kan bidra til at forholdstallet  $\alpha$  må økes. Jeteen er ikke en kystlinje som stopper strømmen, men bidrar derimot betydelig til transporten.

Vi sitter nå igjen med den muligheten som forklarer flest av våre målinger. Forholdstallet  $\alpha$  er underestimert og transporten i det østlige løp er betydelig større enn tidligere antatt. Setter vi  $\alpha = 0,84$  og  $Q_W = 0,36Q_E$  så vil det være samsvar mellom volumtransport beregnet fra vannstandsendringer og volumtransport beregnet fra bunnmontert strømmåler.

Begge disse forholdene er overraskende på hver sin måte, og kan få en til å tvile på måleresultatene. Denne rapporten skulle gi alle de opplysningene som skulle trengs for at leseren skal kunne dømme på egenhånd.





## Kapittel 6

# Konklusjon

Hovedspørsmålet som ble stilt i problemstillingen, var hvorfor den tidsderivate av vannstanden i Indre Fjord gir større volumtransport gjennom Drøbakundet enn direkte strømmålinger. Denne oppgaven kommer ikke fram til noe entydig svar.

Tre målemetoder har blitt brukt med sammenlignbar måleusikkerhet. Den første metoden gikk ut på å benytte en strømprofil målt med en bunnmontert strømmåler på terskelens dypeste punkt. Den andre metoden besto i å ta direkte strømmålinger fra en fartøysmontert strømmåler. Den tredje metoden med å bruke den tidsderivate av vannstanden og prinsippet om bevarelse av volum står som den sikreste metoden. Dette fordi de omfattende undersøkelser som er blitt gjort ikke har avslørt noen store forskjeller i fase eller amplitude til vannstanden i Indre Fjord. Den maksimale faseforskjellen er i snitt 5 minutter mellom Oscarsborg og Oslo havn, men enkelte topper og daler i vannstanden ved en stasjon kan komme opptil 30 minutter før eller etter tilsvarende topper eller daler ved en annen stasjon. Den maksimale forskjellen i amplitude er ved Steilene hvor den var 94 % av amplituden ved Oslo havn.

Det faktum at direkte strømmålinger i et snitt sør for terskelen gir en volumtransport som er større enn det kontinuitetsligningen tilsier, mens direkte strømmålinger i et snitt rett over terskelen gir en volumtransport som er mindre, tyder på at det er kompliserte strømforhold over terskelen som ikke er fullstendig forstått, eller forhold i måleteknikken vi ikke er klar over.

To ting står klart etter disse undersøkelsene. Det ene er at metoden for å bestemme transporten i det østlige løp ved hjelp av en strømprofil på terskelens dypeste punkt underestimerer transporten. Det andre er at det renner mer vann over jeteen i løpet av en inn- eller utstrømningsperiode enn tidligere antatt. Ved å sette forholdet mellom transporten i det østlige løp og den profilbaserte transporten i det østlige løp lik 0,84, og ved å sette transporten i det vestlige løp lik 36 % av transporten i det østlige løp, blir det samsvar mellom målingene.

Et av problemene som blir nevnt i kapittel 1, er hvordan vannstand og fase endres i Indre Fjord. Feltemålingene viser at amplituden er minst ved Steilene

og større ved Vettre. Amplituden er størst ved Oslo havn, og inni Bunnefjorden er den mindre. Høyvann og lavvann kommer i snitt tidligere ved Uranienborg enn ved Oslo havn. Den numeriske modellen gjensker ikke disse forholdene, noe som kan tyde to ting; enten er målingene feil eller så overforenkler modellen.

Den numeriske modellen viser at tidevannsbølgen brer seg innover fjorden, for så å bli reflektert flere ganger fra land, og så addere seg opp med den inngående/utgående bølgen. Fjordens geometri skaper et komplisert bølgemønster, hvor forskjellen i vannstand mellom innerst og ytterst i fjorden skifter fortegn flere ganger i løpet av en tidevannsperiode.

Når det gjelder egensvinginger på overflaten, så er disse for raske til at de kan finnes igjen i felldataene. Egensvingninger mellom et øvre og nedre lag av vannsøylen kan gi frekvenser av samme størrelsesorden som tidevannsfrekvensene, men fjordens kompliserte geometri gjør det vannskelig å si hvilke lengdeskalaer som er aktuelle.

Den numeriske modellen forsterker frekvenser av typen  $M_6$  på en ufysikalsk måte. Disse periodene fins i måldataene, og kommer tydeligst fram i differansen mellom vannstanden ved Steilene og Vettre. Det er mulig at svingninger på overflata blir dempet ved at energi overføres til indre svingninger.

Hvordan topografien styrer strømmen over terskelen er som sagt ikke blitt fullstendig forstått i denne oppgaven. Det kan likevel sies at strømmen er sterkt styrt av topografien ved utstrømning. Sundet er delt i to av Håøya, og isobatene rett nord for terskelen dreier strømmen til venstre på vei utover. På vei innover er ikke strømmen styrt på samme måte, fordi sundet sør for terkelen har en veldig enkel geometri

## Tillegg A

# Symboler

Her følger en tabell (i to deler) over symbolene som er blitt brukt i teksten. Symbolene for tidevannskomponentene fins i tabell 2.3 på side 13.

Symbol	Betydning	Enhet
$a$	konstantledd	
$A$	tverrsnittareal	$m^2$
$A_k$	delarealet i dypet $z_k$	$m^2$
$A_{ik}$	et element av tverrsnittarealet	$m^2$
$a_m$	amplituden	$m$
$A_v$	eddykoeffisient	$m^2/s$
$b$	forholdstall	
$b_m$	forholdet mellom vannstanden ved stasjon $m$ og Oslo havn	
$C_D$	friksjonskoeffisient	
$E$	fordampning	$m^3/s$
$E_n$	energi på frekvensen $f_n$	$m^2$
$F$	fjordareal	$m^2$
$f$	Coriolis parameteren	$rad/s$
$f_n$	frekvens	$s^{-1}$
$f_{n\pm 1/2}$	frekvensintervall	$s^{-1}$
$g$	tyngdens akselerasjon	$m/s^2$
$g^*$	reduisert tyngde	$m/s^2$
$H$	det totale vanndypet	$m$
$h$	avvik fra middelvannstand	$m$
$h_t$	den tidsderiverte til vannstand	$m/s$
$H_0$	middelvannstand	$m$
$H^*$	tykkelsen av det øvre laget	$m$
$i$	indeks for $x$	
$I$	høyeste indeks for $x$	
$j$	indeks for $y$	
$J$	høyeste indeks for $y$	
$k$	indeks for $z$	
$K$	høyeste indeks for $z$	
$K_{10}$	vindkoeffisient for vind målt i 10 metres høyde	
$L$	lengdedimensjon	$m$
$n$	indeks for $t$	
$N$	høyeste indeks for $t$	
$m$	generell indeks	
$P$	nedbør	$m^3/s$
$Q$	total transport i sundet	$m^3/s$
$Q^A$	transporten beregnet fra VMCP-målinger i snitt A	$m^3/s$
$Q^B$	transporten beregnet fra VMCP-målinger i snitt B	$m^3/s$
$Q_E$	transporten i det østlige løp	$m^3/s$
$Q^h$	transporten beregnet fra vannstandsendringer	$m^3/s$
$Q^p$	den profilbaserte transporten	$m^3/s$
$Q^v$	transporten beregnet fra AWAC-målinger	$m^3/s$
$Q_W$	transporten i det vestlige løp	$m^3/s$
$Q^*$	den ønskede transporten	$m^3/s$
$R$	volumtransport fra elvene	$m^3/s$
$R(\tau)$	autokovariansfunksjonen	$m^2$

Tabell A.1: Symboler brukt i teksten.

Symbol	Betydning	Enhet
$S_n$	energi per frekvensintervall	$m^2/s$
$S_h$	standardavviket til variabelen $h$	
$t$	tid	$s$
TB	forkortelse for Trygve Braarud, UiO sitt forskningsfartøy	
$u$	strømhastighet i $x$ -retning	$m/s$
$U$	fluks i $x$ -retning	$m^2/s$
$v$	strømhastighet i $y$ -retning	$m/s$
$\vec{v}$	strømvektor	$m/s$
$\vec{v}_{SOG}$	skipets fart over grunnen	$m/s$
$\vec{v}_{MCP}$	skipets fart gjennom vannet	$m/s$
$V$	fluks i $y$ -retning	$m^2/s$
$W_{10}$	vindhastighet målt i 10 meters høyde	$m/s$
$x$	posisjon	$m$
$y$	posisjon	$m$
$z$	posisjon	$m$
$\alpha$	forholdstall	
$\beta$	konstantledd	$m^3/s$
$\gamma$	dreiningsvinkel	$rad$
$\Delta f$	frekvensintervall	$rad/s$
$\Delta t$	tidsintervall	$s$
$\epsilon$	grenseavvik	$cm$
$\lambda$	bølgelengde	$m$
$\mu$	hjelpekonstant for numerisk beregning	
$\rho$	vannets tetthet	$kg/m^3$
$\rho_A$	luftas tetthet	$kg/m^3$
$\sigma$	egenfrekvens	$rad/s$
$\sigma^*$	indre egenfrekvens	$rad/s$
$\sigma_t$	vannets tetthet ( $\rho - 1000 \text{ kg}/m^3$ )	
$\tau$	tidsforskyvning	$s$
$\tau_s$	vindfriksjon	$N/m^2$
$\phi_m$	fasen til tidevannskomponenten $m$	$rad$
$\omega_m$	frekvensen til tidevannskomponenten $m$	$rad/s$

Tabell A.2: Symboler brukt i teksten.



## Tillegg B

# Frekvensspektra

Her blir først en metode for beregning av energien på diskrete frekvenser presentert. Så blir frekvensspektraene for vannstand- og strømmålinger lagt fram.

### B.1 Fourier analyse.

Den følgende utledningen er standard teori hentet fra Aas (1986). Vi tar utgangspunkt i en tidsserie  $h(t)$ , hvor vi har målt en fysisk størrelse, i vårt tilfelle vannstand eller strømhastighet. Denne størrelsen er målt fra  $t = 0$  til  $t = T$ , med  $\Delta t$  som tidsintervall.

Vi antar at  $h(t)$  kan skrives som en Fourier-rekke, det vil si en sum av sinus-ledd, hvor hvert ledd har hver sin frekvens og amplitude.

Frekvensen vil være

$$f_n = \frac{n}{T},$$

hvor  $n = 1(1)N$  og  $N = \frac{T}{2\Delta t}$ . Den laveste frekvensen blir  $f_1 = 1/T$ , og den høyeste blir  $f_N = 1/2\Delta t$ .

Amplituden bestemmer energien  $E_n$  på hver frekvens.  $E_n$  er energien som ligger i frekvensintervallet

$$f_{n\pm 1/2} = \frac{n}{T} \pm \frac{1}{2T},$$

siden  $\Delta f = 1/T$ .

En enkel metode for å beregne frekvensspekteret, er først å beregne autokovariansfunksjonen

$$R(\tau) = \overline{h(t)h(t+\tau)}.$$

der  $\tau$  er en tidsforskyvning i tidsserien  $h(t)$ .

Energien per frekvensintervall blir

$$S_n = 2 \int_0^\infty R(\tau) \cos(2\pi f_n \tau) d\tau,$$

og energien i hvert frekvensintervall blir

$$E_n = S_n \Delta f.$$

Enheten til energien blir kvadratet av enheten til  $h(t)$ . Men størrelsen til energien på en frekvens relativt til en annen frekvens er viktigere enn den absolutte størrelsen.

Et problem med Fourieranalyse er at vi jobber med diskrete frekvenser. La oss for eksempel se på  $M_2$ -komponenten, som har en vinkelhastighet på  $1.405 * 10^{-4} rad/s$ , og la oss anta at vi har en tidsserie på  $T = 7$  døgn og et tidsintervall  $\Delta t = 600s$ . Vinkelhastigheten er  $\omega = 2\pi \frac{n}{T}$ , og  $n$  blir for  $M_2$  13,53. Siden frekvensen er diskret, blir energien fordelt på  $n = 13$  og  $n = 14$ .

## B.2 Vannstandsmålinger

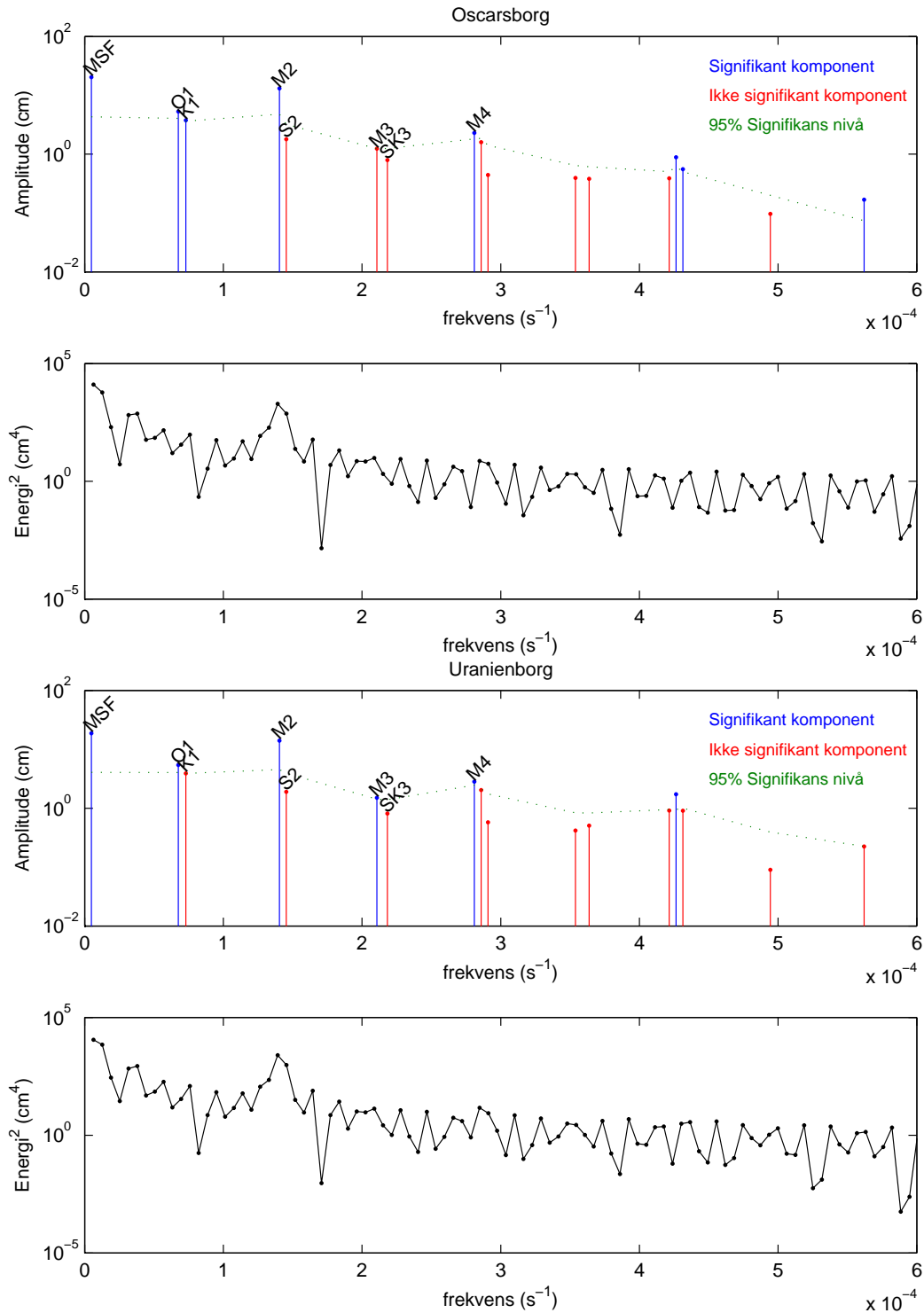
I figur B.1 er Fourier- og Harmonisk analyse presentert for stasjonene Oscarsborg og Uranienborg for måleperioden i januar. Spekteret for de to stasjonene ser temmelig like ut. Vi ser en topp rundt  $M_2$ -frekvensen i begge figurene. Fourieranalyse for Oslo og Oscarsborg har blitt utført med lengre tidsserier. Frekvensens oppløsning blir da bedre. Vi finner da en del energi rundt frekvensen til  $O_1$  og  $K_1$ , en tydelig topp rundt  $M_2$ , litt energi ved  $M_4$  og antydning til en lokal topp rundt  $2MS_6$ .

## B.3 Strømmålinger.

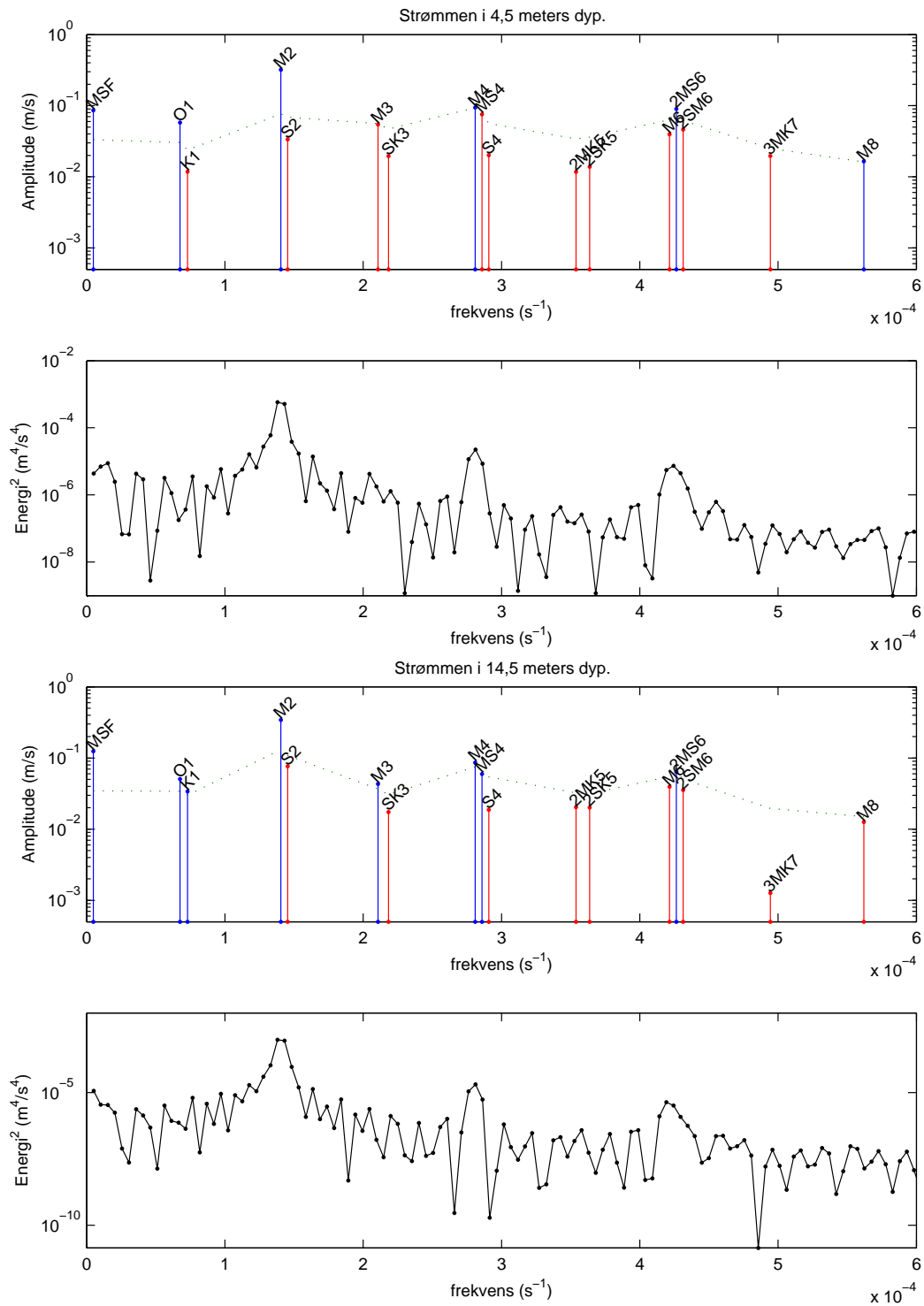
Figur B.2 viser resultatet av frekvensanalysen for strømmen over og under sprangsjiktet. Det ser ikke ut til at det er noen forskjell i energifordelingen over og under sprangsjiktet.

I fourierspekteret finner vi tre tydelige topper. Disse ligger på frekvensene til  $M_2$ ,  $M_4$  og  $2MS_6$ .





Figur B.1: Harmonisk- og Fourieranalyse for stasjonen Oscarsborg (øverst) og Uranienborg (nederst).



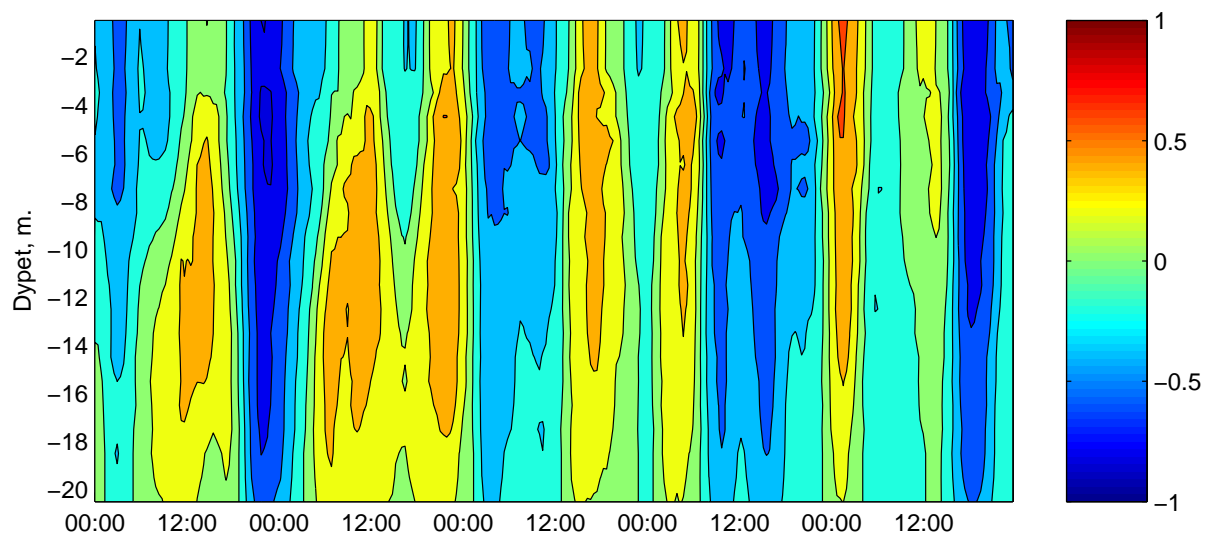
Figur B.2: Harmonisk- og Fourieranalyse for strømmen i 4,5 meters dyp (øverst) og 14,5 meters dyp (nederst).

## Tillegg C

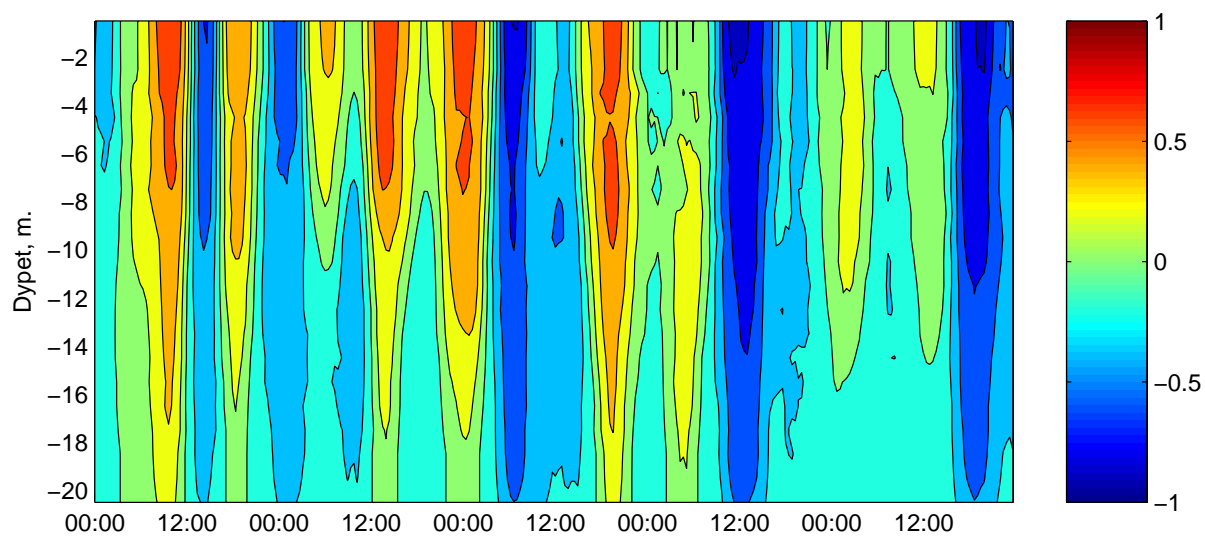
# Måledata

### C.1 Strømmålinger i Drøbaksundet

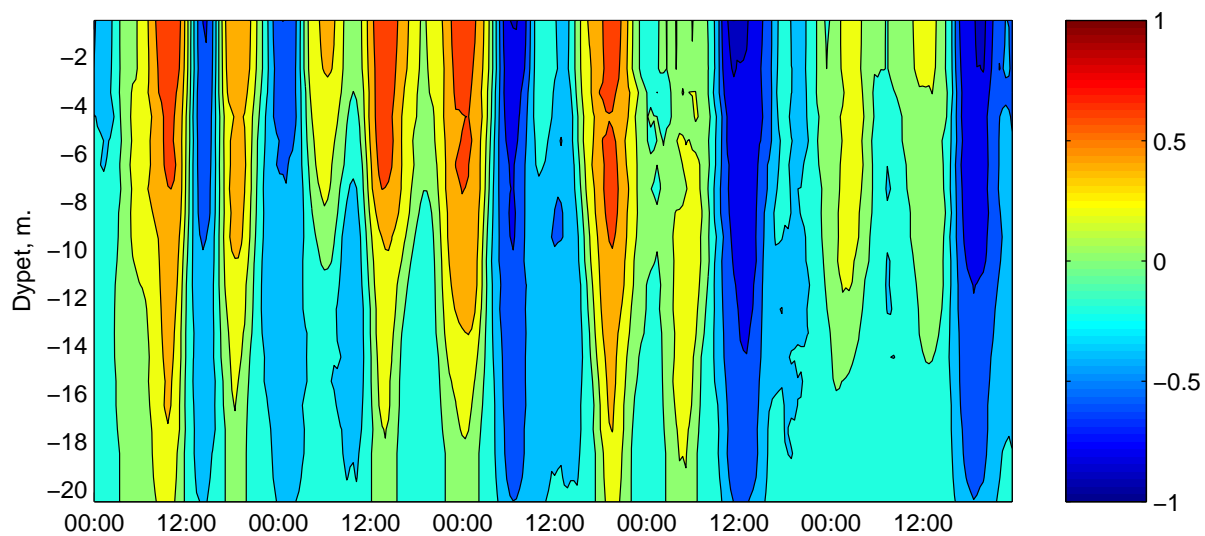
På de neste sidene er strømmålingene foretatt med den bunnmonterte strømmåleren (AWAC) presentert (figur C.1 - C.8). Her er linjene for lik strømhastighet plottet som funksjon av dypet og tiden. Hele måleperioden fra 9. til 24. januar 2004 er tatt med. Et glidende middel over 40 minutter er benyttet. Positive verdier angir strøm inn i Indre Fjord. Negavtive verdier angir strøm ut av Indre Fjord.



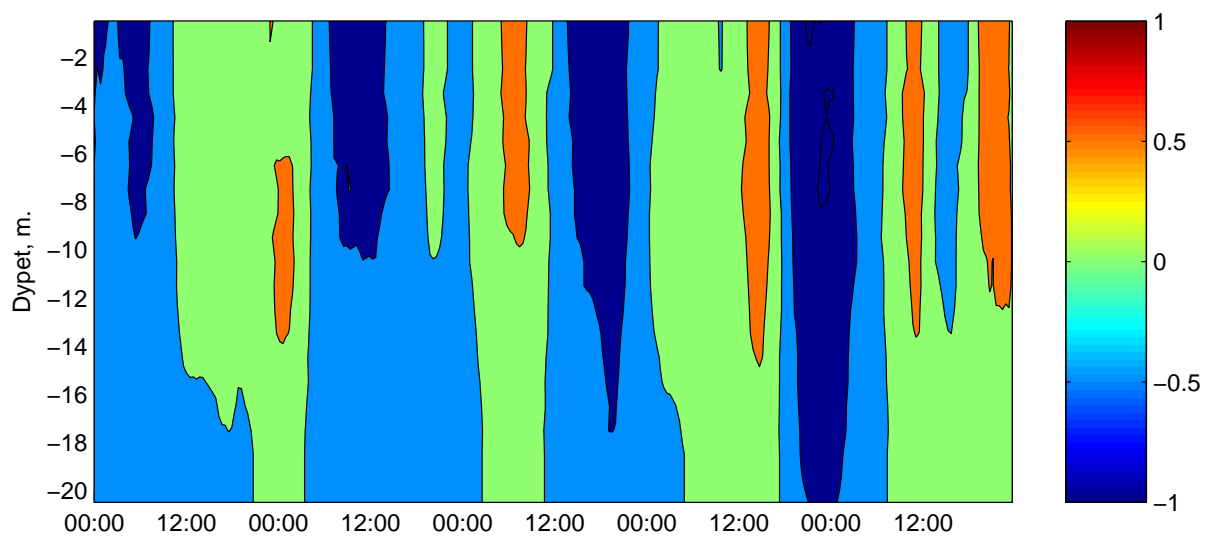
Figur C.1: *Strømmen (m/s) 9. og 10. januar 2004.*



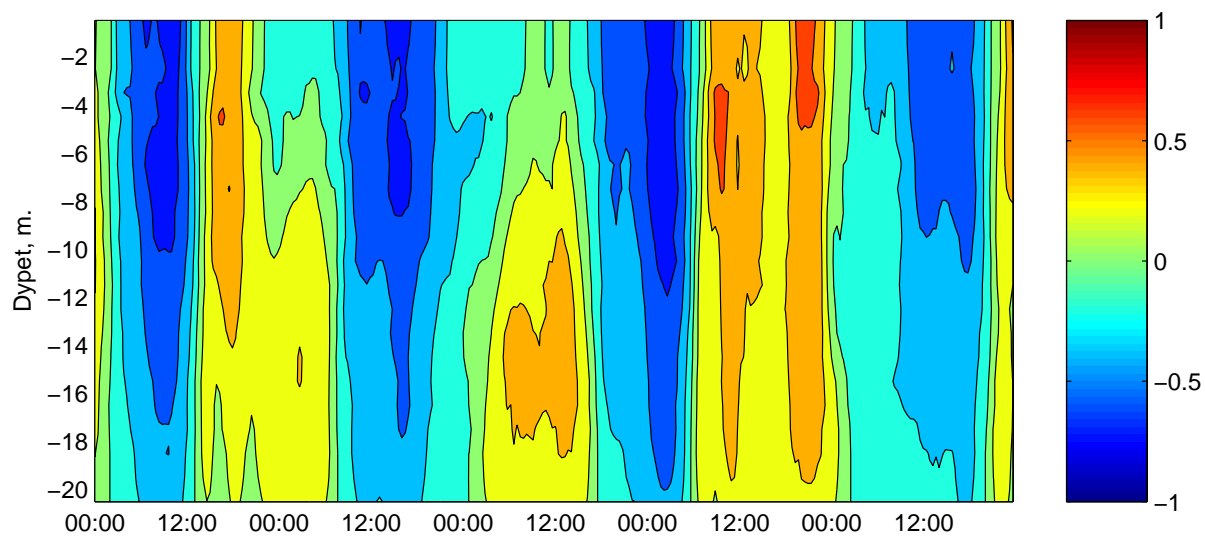
Figur C.2: *Strømmen (m/s) 11. og 12. januar 2004.*



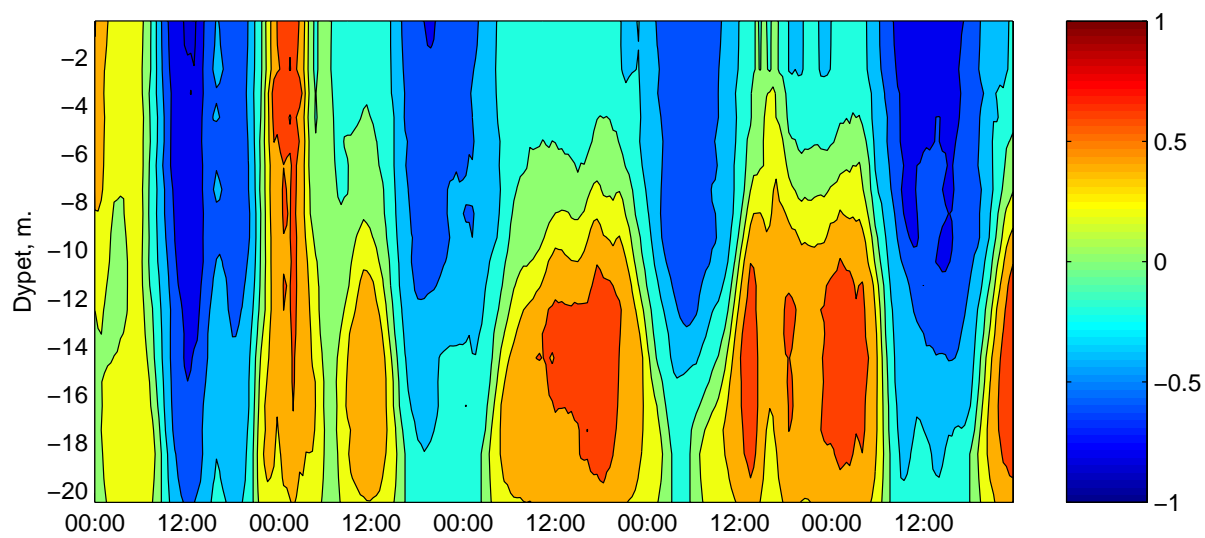
Figur C.3: Strømmen (m/s) 13. og 14. januar 2004.



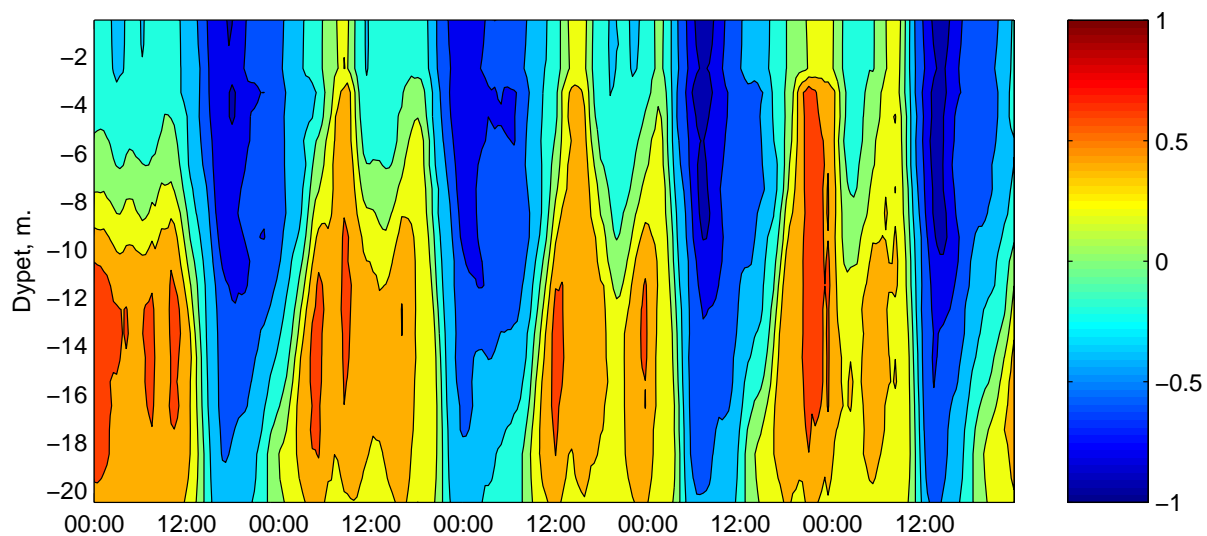
Figur C.4: Strømmen (m/s) 15. og 16. januar 2004.



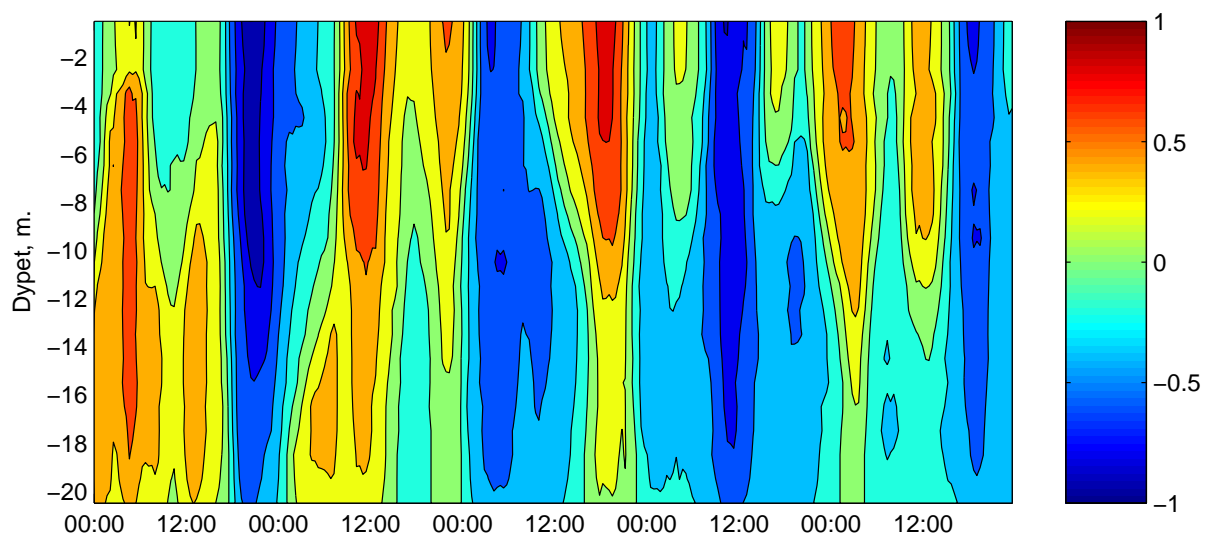
Figur C.5: *Strømmen (m/s) 17. og 18. januar 2004.*



Figur C.6: *Strømmen (m/s) 19. og 20. januar 2004.*



Figur C.7: Strømmen (m/s) 21. og 22. januar 2004.



Figur C.8: Strømmen (m/s) 23. og 24. januar 2004.





## Tillegg D

# Vannstands- og volumfluksatlas

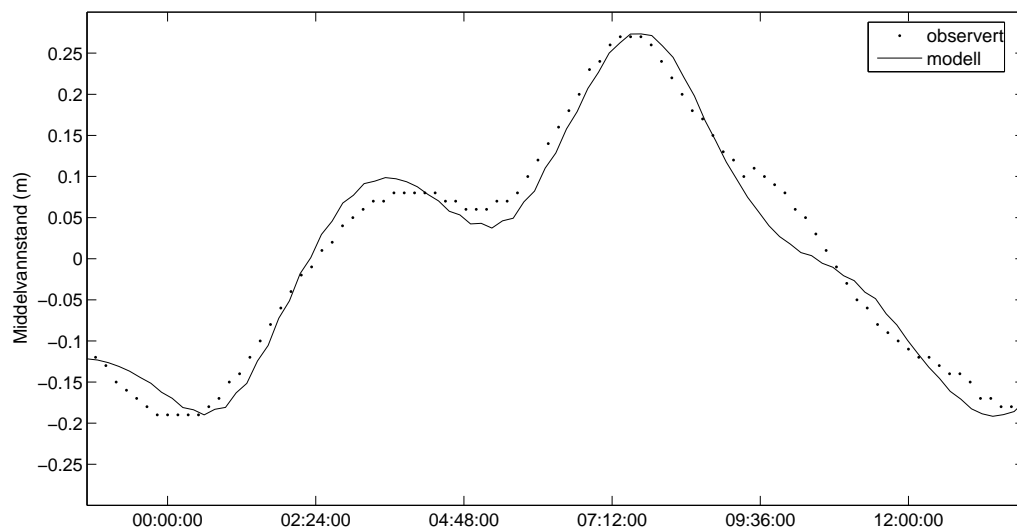
### D.1 Resultater fra den numeriske modellen

På de følgende sidene vises konturlinjer for vannstanden. Dette er resultater fra simuleringsmodellen, som er kjørt over tidevannsperioden i figur D.1 på neste side. Vi skal se på hva modellen sier om vannstandens variasjon i Indre Fjord. Vi ser på vannstanden fra et lavvann til neste lavvann, med fokus på om observerte forhold gjenspeiles i modellen.

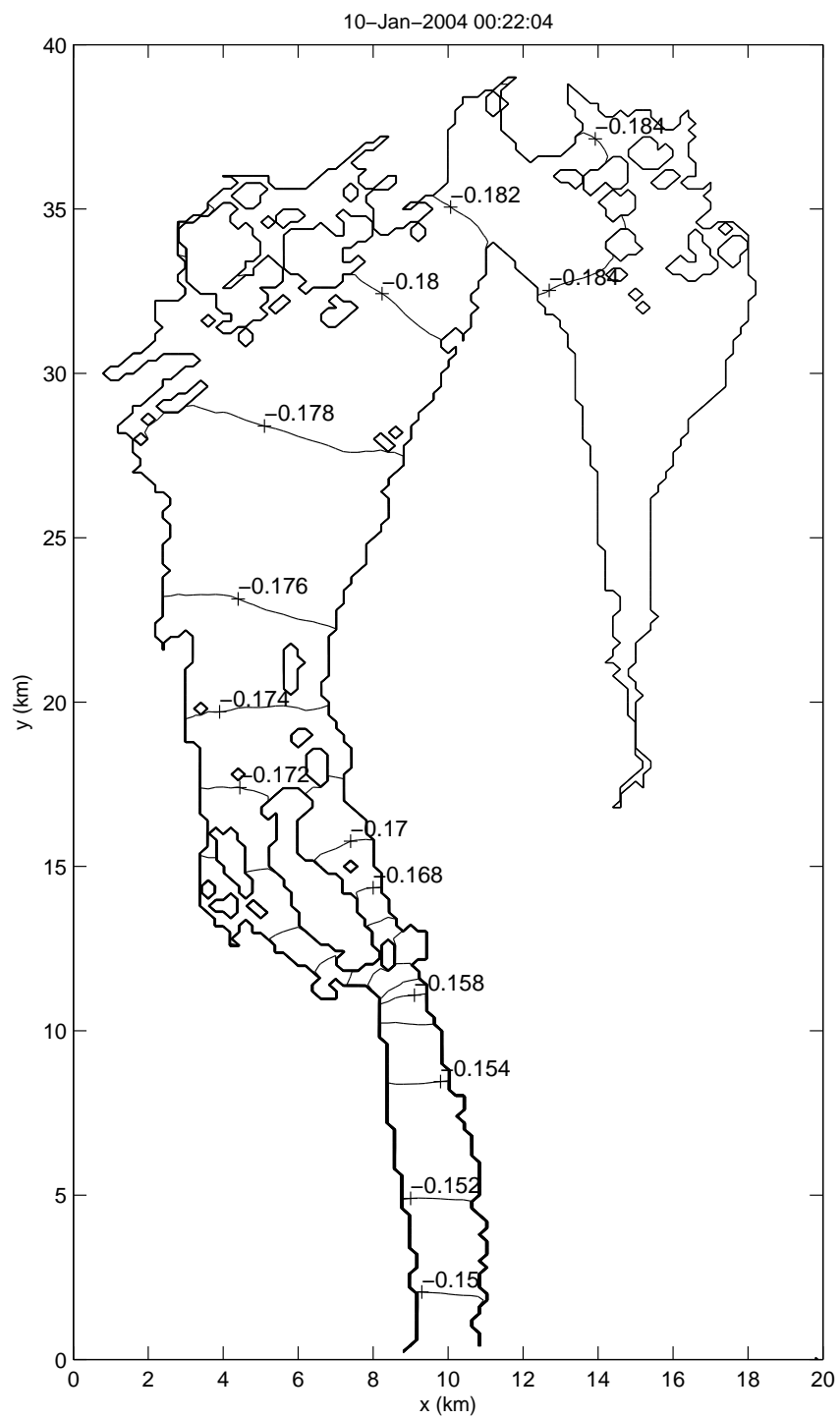
Vi starter ved lavvann omtrent klokka 00:22 den 10. januar 2004. Vannstanden er da høyest ved Filtvedt, og minker gradvis innover i fjorden. Lavest er den i Oslo havn og inne i Bunnefjorden. Differansen mellom vannstanden ytterst og innerst i Indre Fjord er 3,4 *cm*. En time seinere er situasjonen ganske lik, men differansen har økt til 5,8 *cm*. Klokka 02:22 er vannstanden nesten lik i hele fjorden. Det er et minimum ved Håøya. Klokka 03:22 er vannstanden høyest innerst i Bunnefjorden. Differansen mellom vannstanden ytterst og innerst i fjorden er -4 *cm*. Vi ser av figur 4.10 at vi har en knekk i vannstanden.

Klokka 04:22 er vannstanden synkende. Ingen store differanser i vannstand i fjorden. En time etter dette har vi et lokalt lavvann. Vannstanden er nå høyest ved Filtvedt, og differansen er 5,4 *cm*. Klokka 06:22 har vannstanden begynt å stige igjen. Vannet står lavest i Oslo havn. Vannet er generelt høyere på østsiden av Vestfjorden. Differansen mellom vannstanden ytterst og innerst i fjorden er 3,2 *cm*.

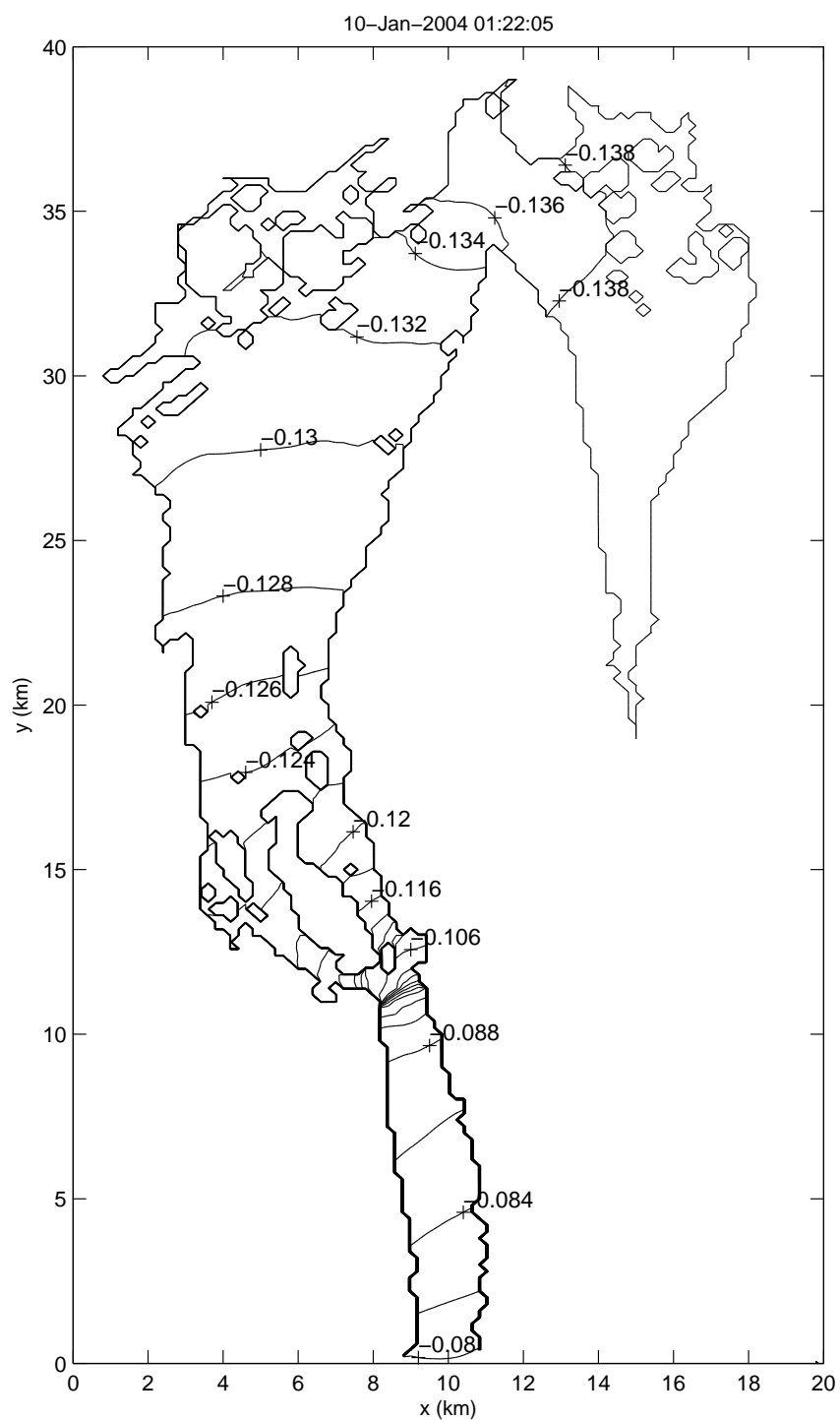
Klokka 07:22 er det høyvann. Vannstanden er nå høyest innerst i fjorden. Differansen er -6,4 *cm*. En time etter er situasjonen ganske lik, men differansen er nå -5,4 *cm*. Klokka 09:22 er vannstanden synkende, og nivået er høyest ytterst i fjorden. Klokka 12:22 er det lavvann. Vannstanden er høyest ytterst i fjorden, men differansen er bare 1,2 *cm*.



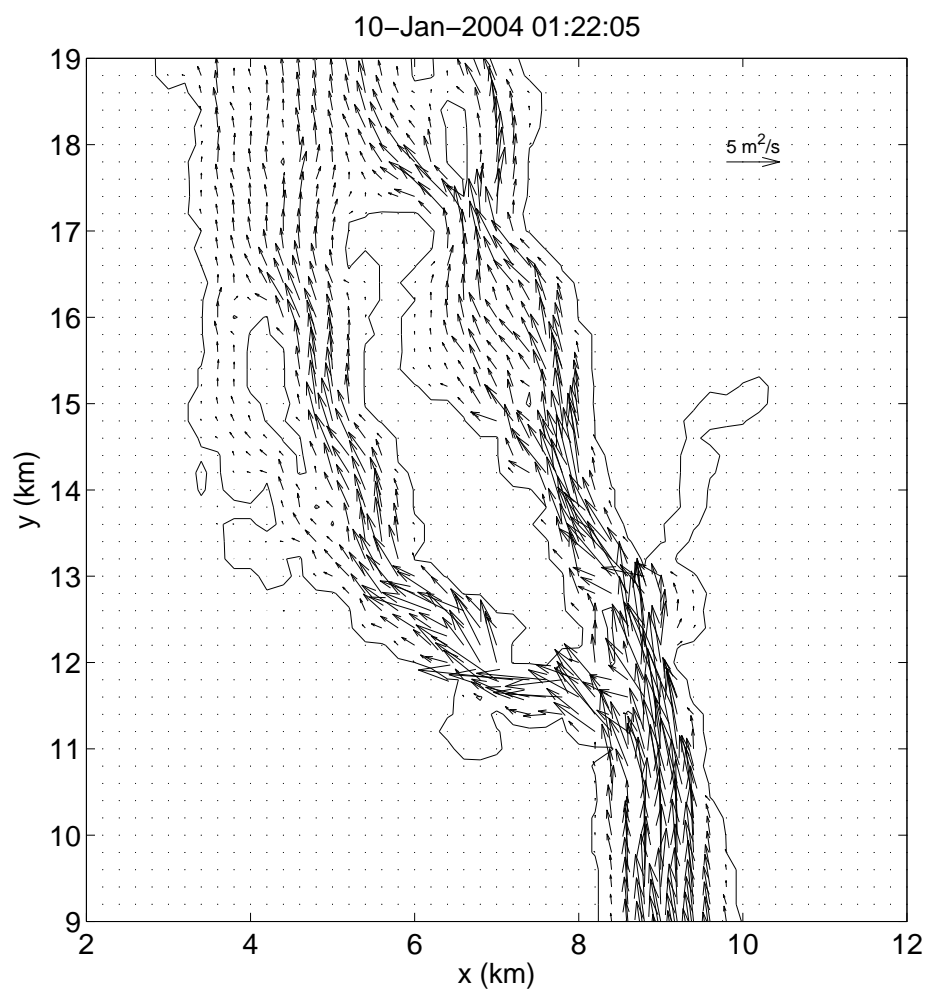
Figur D.1: Vannstanden i Oslo 10. januar 2004. Den tidevannsperioden som ble analysert er her forstørret.



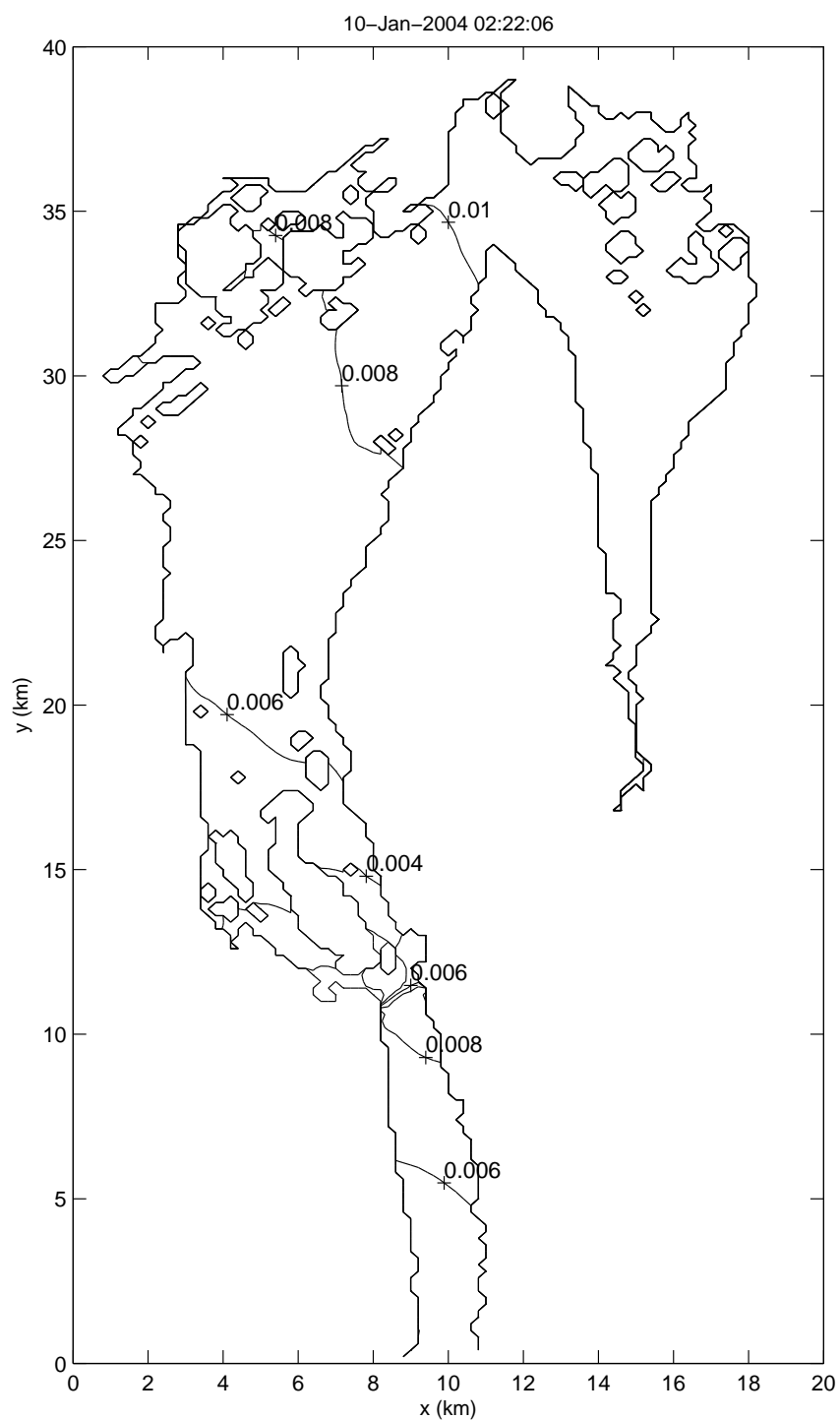
Figur D.2: Vannstanden i Indre Fjord oppgitt i meter. Referansenivået er middelvannstand. Konturintervallet er 2 mm.



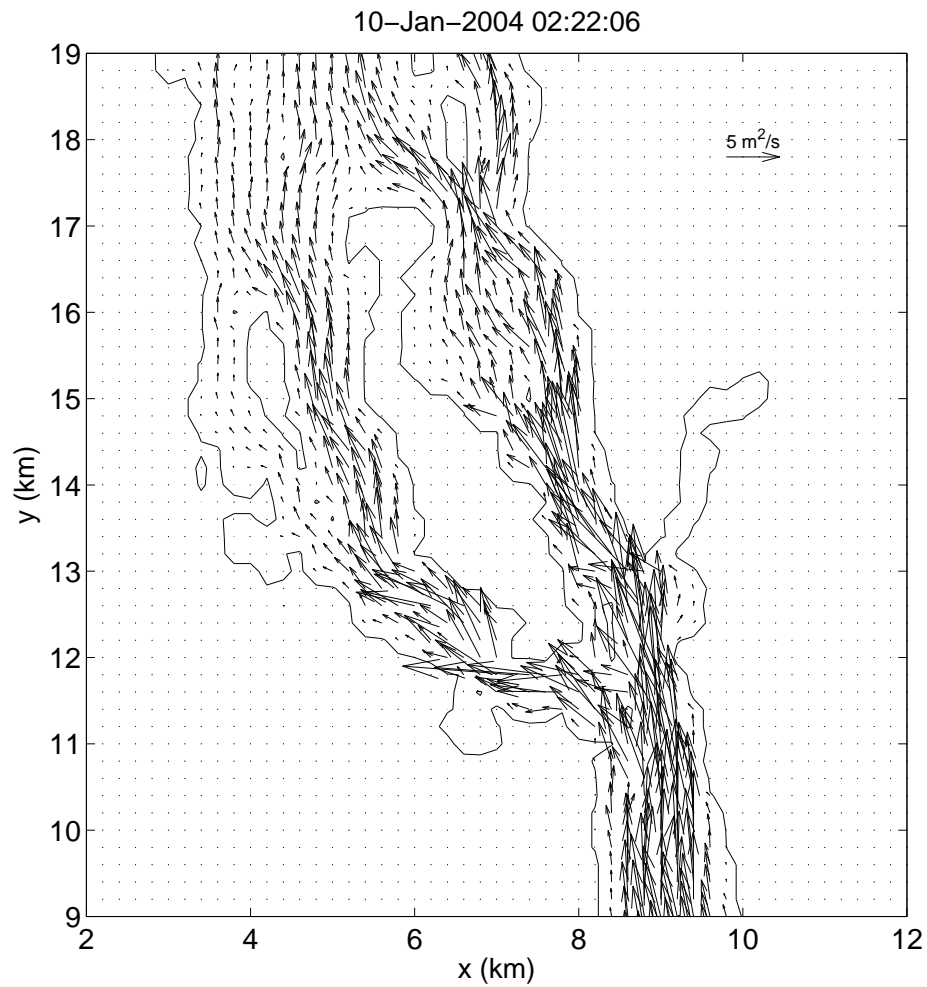
Figur D.3: Vannstanden i Indre Fjord oppgitt i meter. Referansenivået er middelvannstand. Konturintervallet er 2 mm.



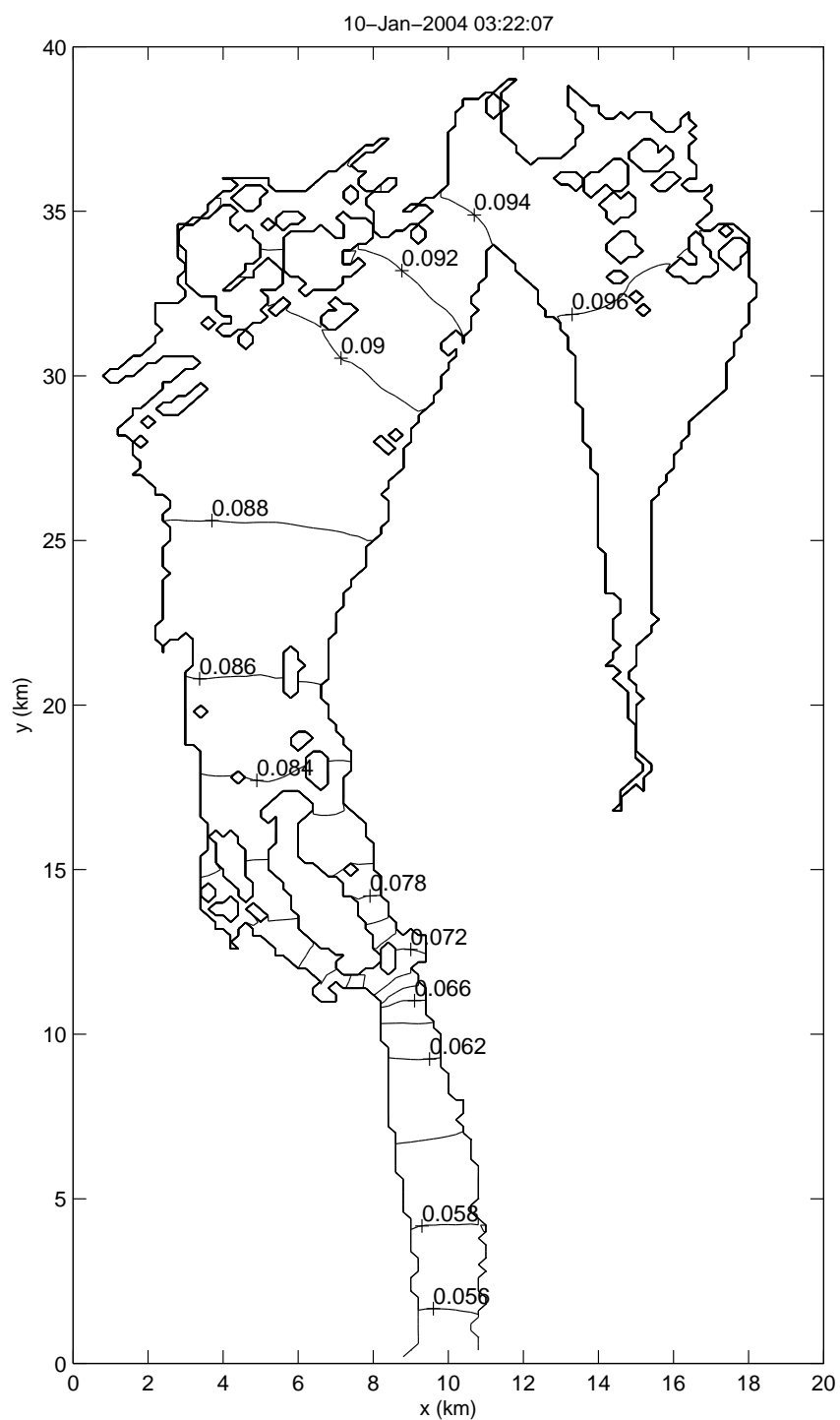
Figur D.4: Volumfluks i Drøbaksundet. Benevningen er  $\text{m}^2/\text{s}$ . For å få den dybdeintegrerte strømhastigheten i  $\text{m}/\text{s}$  må det deles på vann dybden.



Figur D.5: Vannstanden i Indre Fjord oppgitt i meter. Referansenivået er middelvannstand. Konturintervallet er 2 mm.

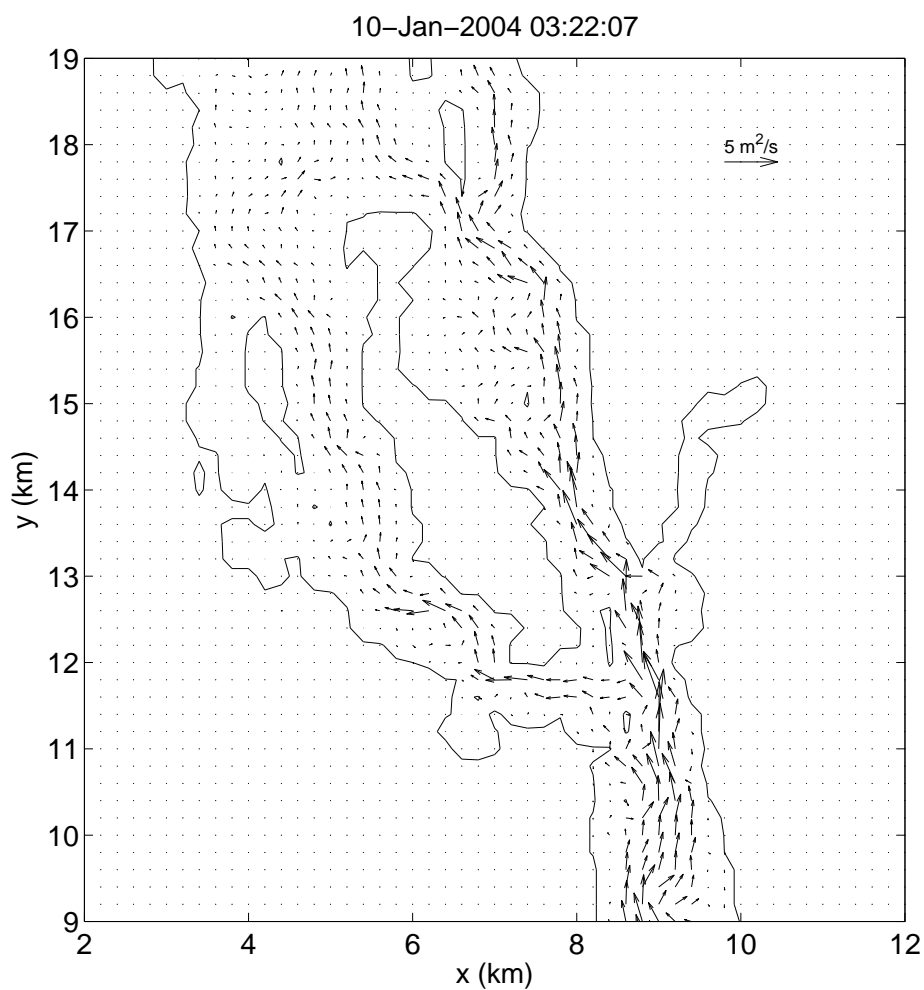


Figur D.6: Volumfluks i Drøbaksundet. Benevningen er  $\text{m}^2/\text{s}$ . For å få den dybdeintegrerte strømhastigheten i  $\text{m}/\text{s}$  må det deles på vannedybden.

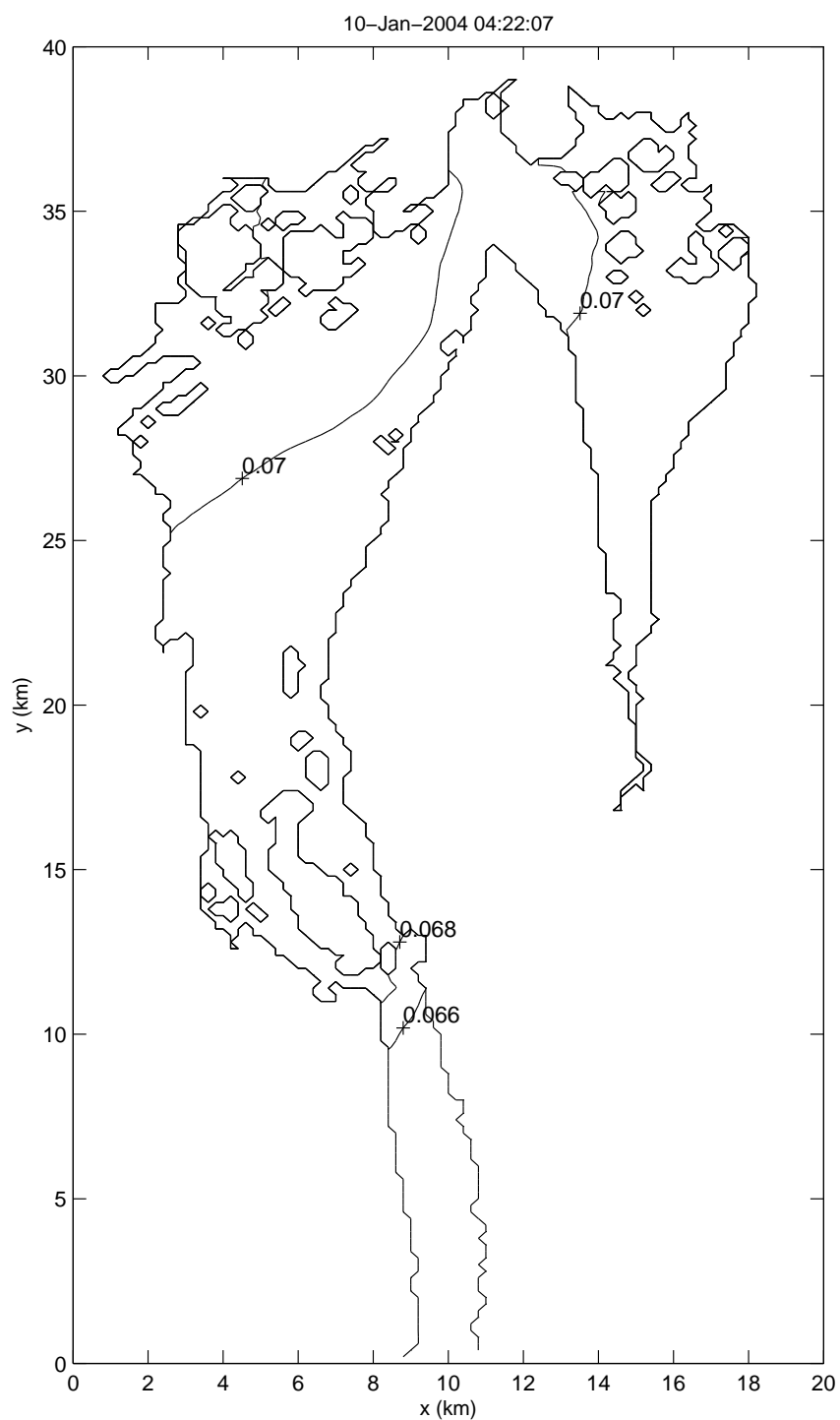


Figur D.7: Vannstanden i Indre Fjord oppgitt i meter. Referansenivået er middelvannstand. Konturintervallet er 2 mm.

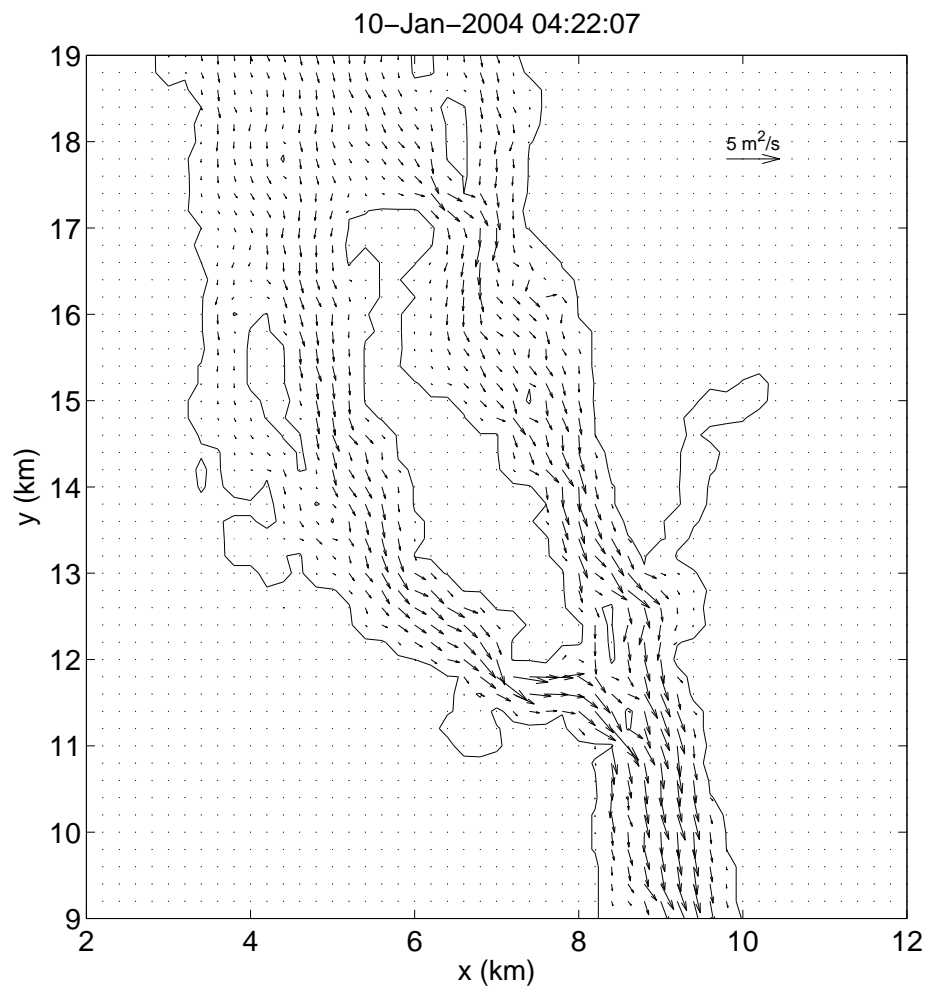




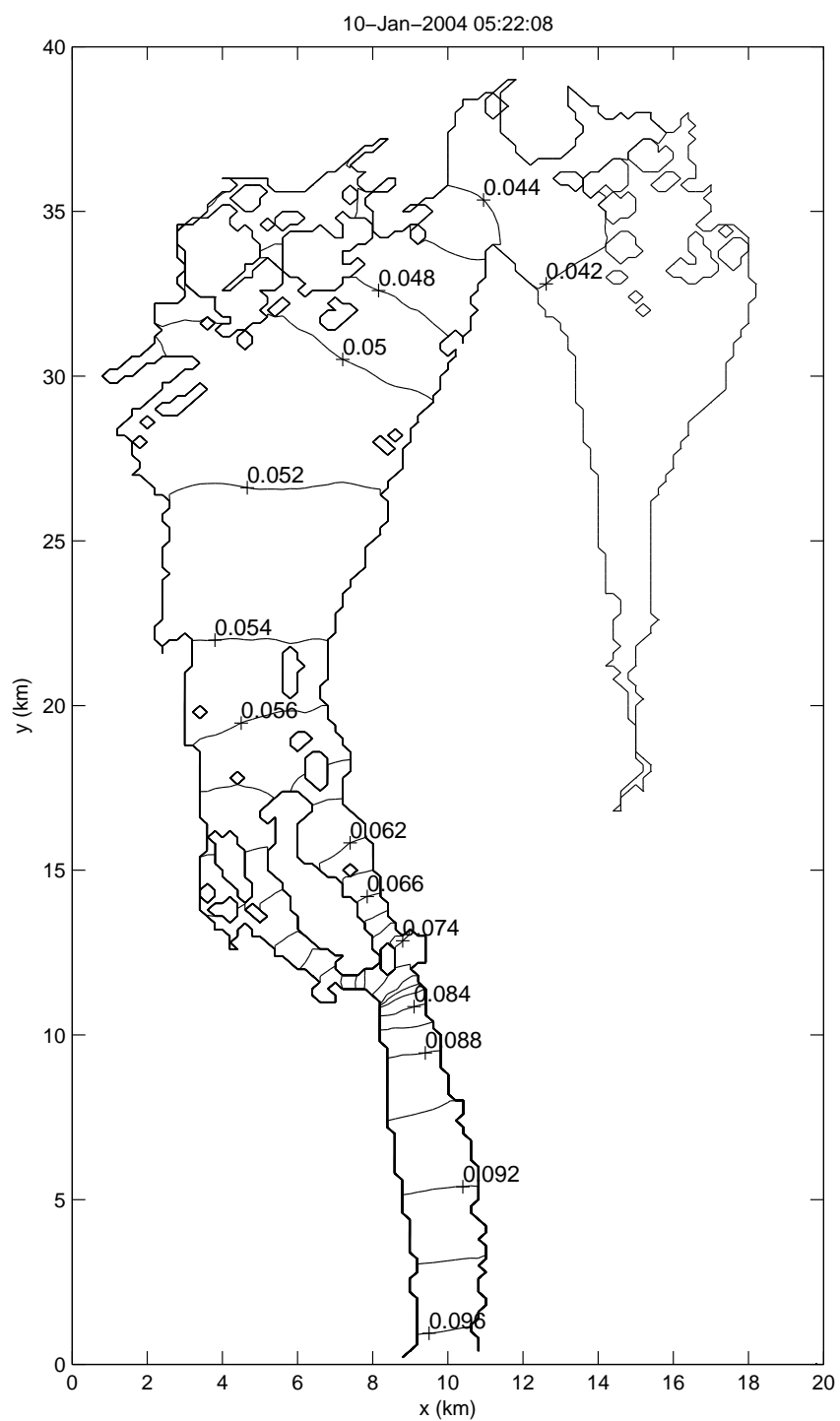
Figur D.8: Volumfluks i Drøbaksundet. Benevningen er  $\text{m}^2/\text{s}$ . For å få den dybdeintegrerte strømhastigheten i  $\text{m}/\text{s}$  må det deles på vann dybden.



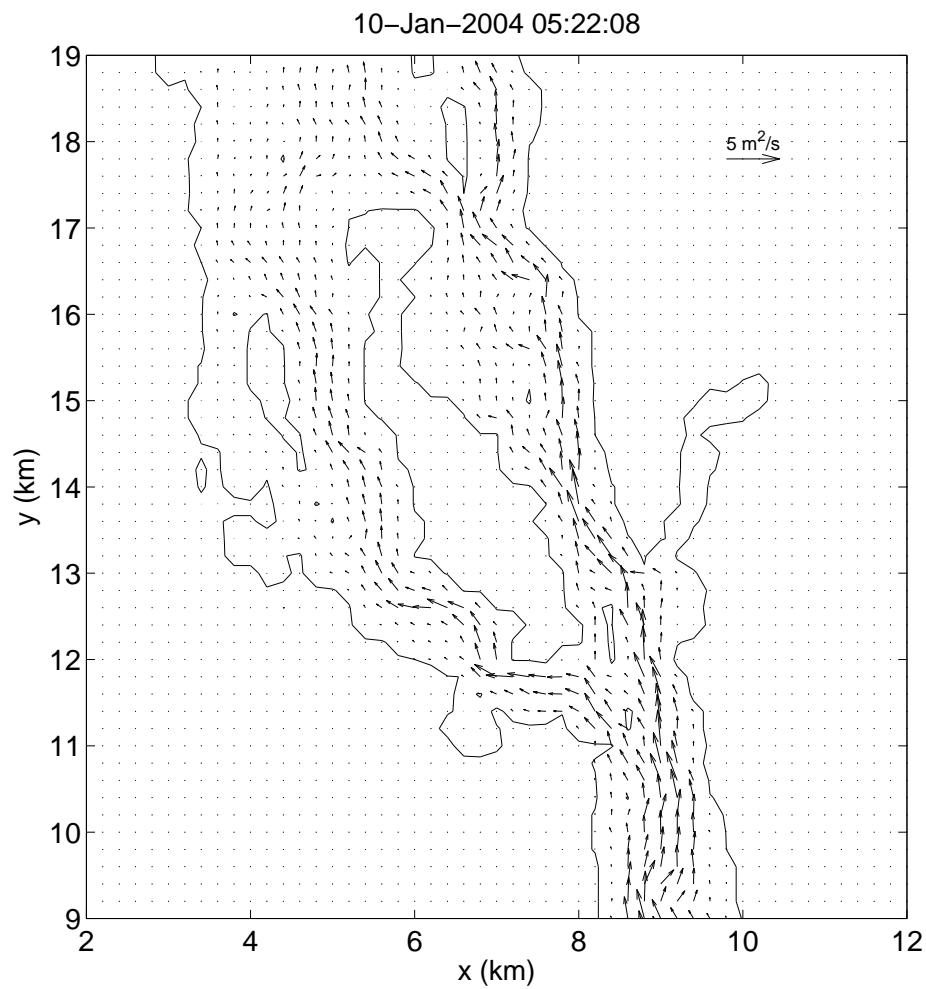
Figur D.9: Vannstanden i Indre Fjord oppgitt i meter. Referansenivået er middelvannstand. Konturintervallet er 2 mm.



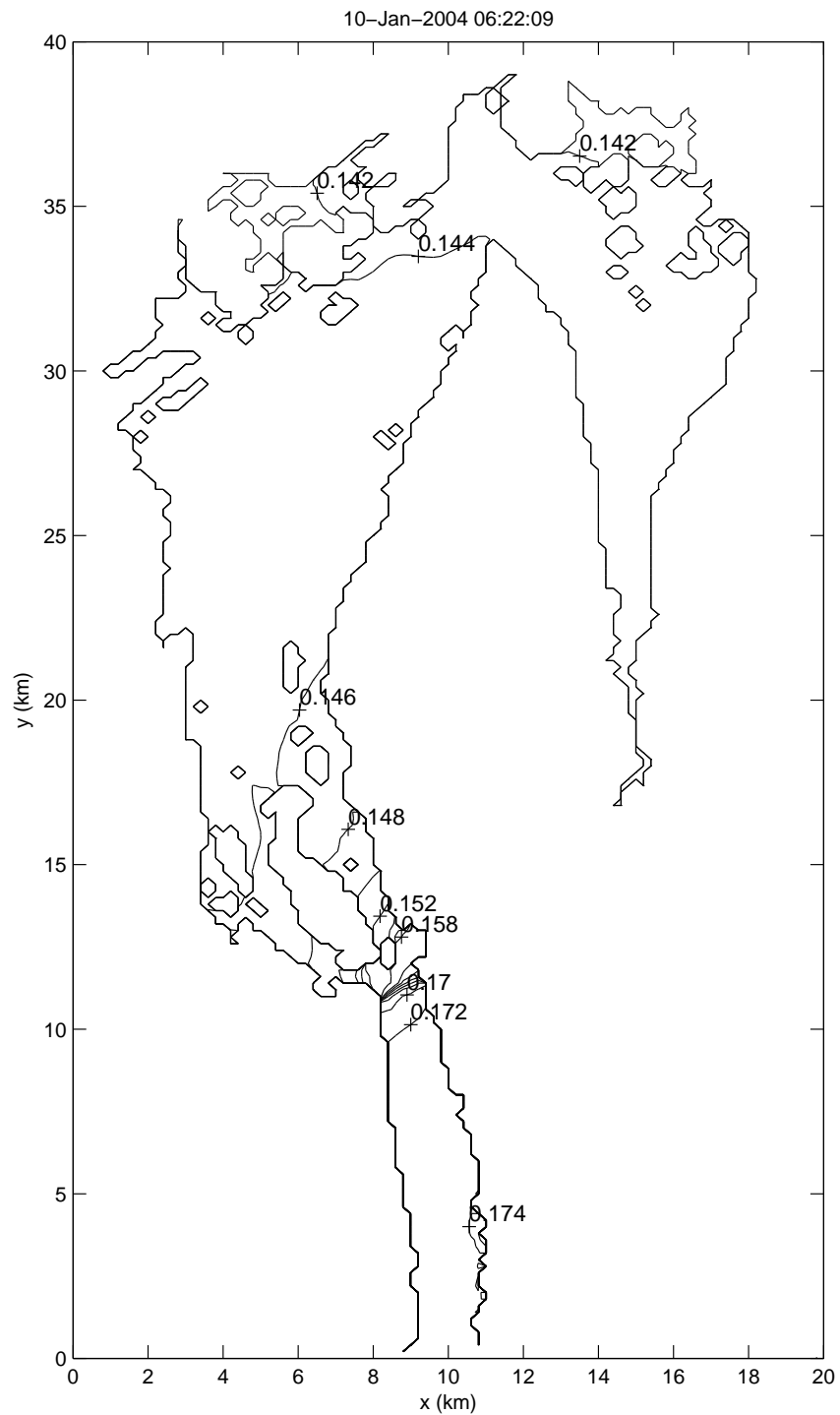
Figur D.10: Volumfluks i Drøbaksundet. Benevningen er  $\text{m}^2/\text{s}$ . For å få den dybdeintegrerte strømhastigheten i  $\text{m}/\text{s}$  må det deles på vannedybden.



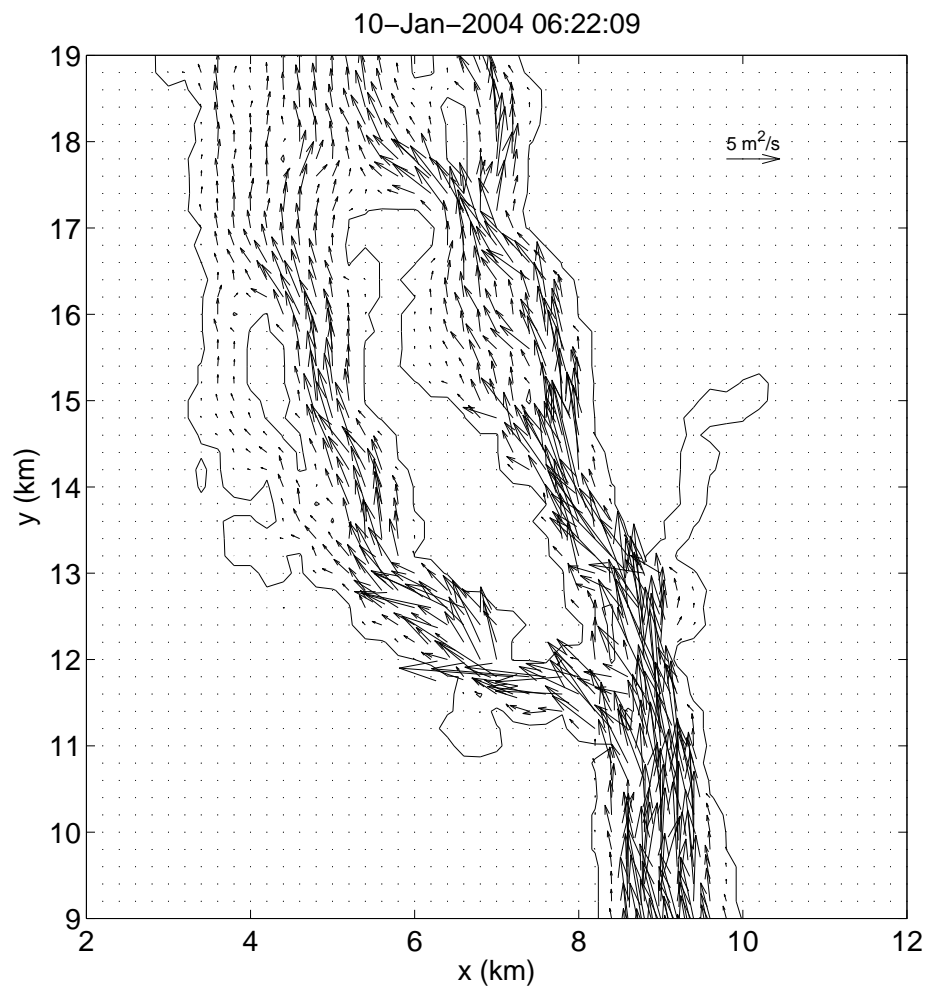
Figur D.11: Vannstanden i Indre Fjord oppgitt i meter. Referansenivået er middelvannstand. Konturintervallet er 2 mm.



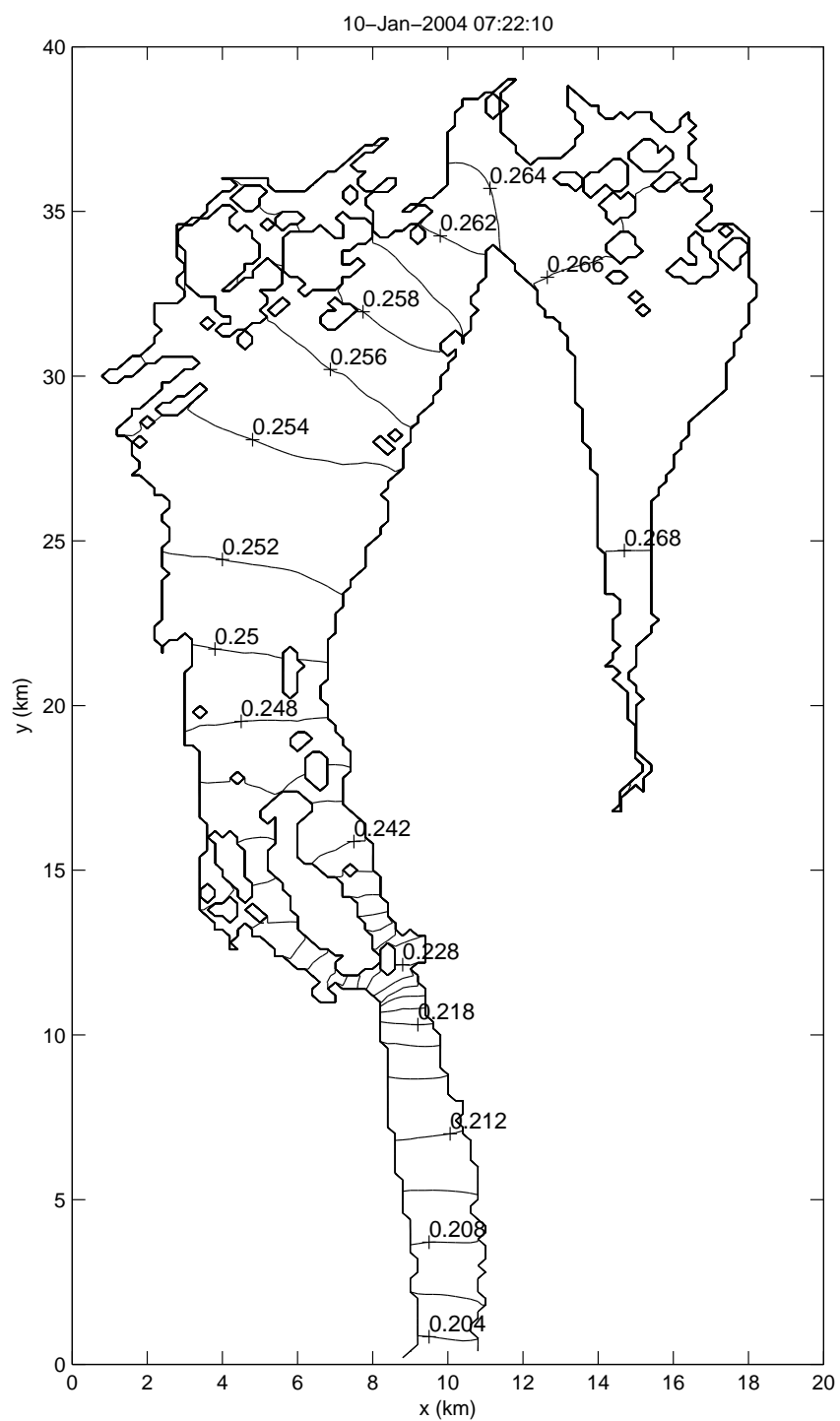
Figur D.12: Volumfluks i Drøbaksundet. Benevningen er m<sup>2</sup>/s. For å få den dybdeintegrerte strømhastigheten i m/s må det deles på vannedybden.



Figur D.13: Vannstanden i Indre Fjord oppgitt i meter. Referansenivået er middelvannstand. Konturintervallet er 2 mm.

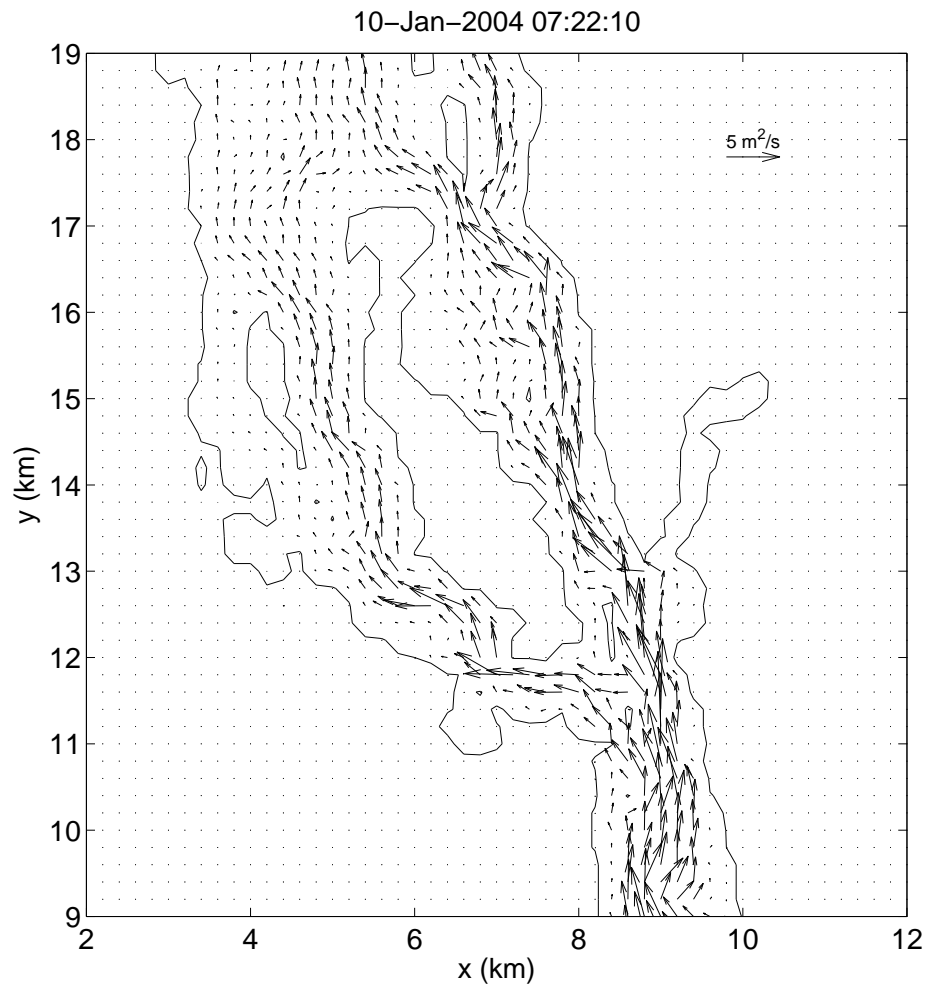


Figur D.14: Volumfluks i Drøbaksundet. Benevningen er  $\text{m}^2/\text{s}$ . For å få den dybdeintegrerte strømhastigheten i  $\text{m}/\text{s}$  må det deles på vannedybden.

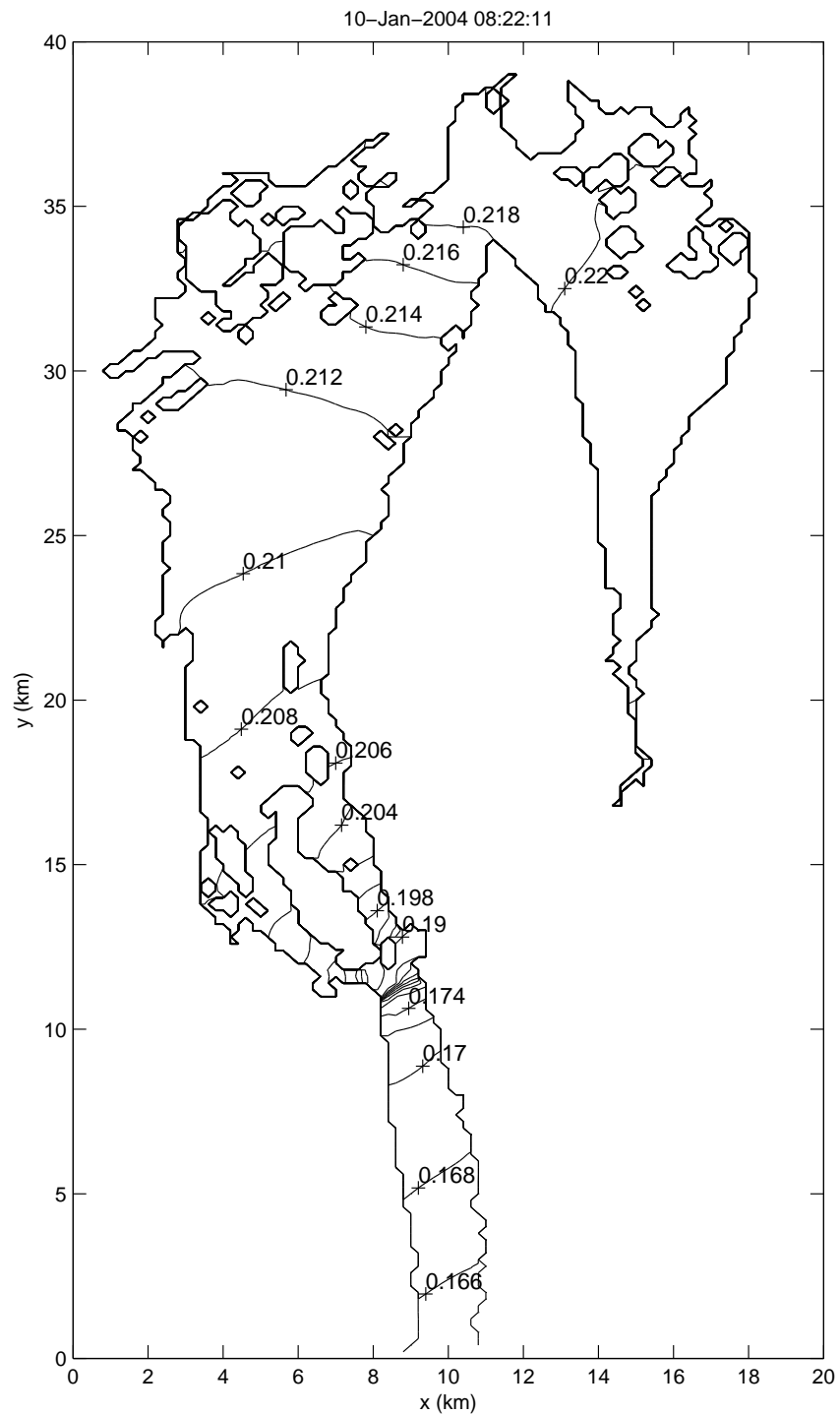


Figur D.15: Vannstanden i Indre Fjord oppgitt i meter. Referansenivået er middelvannstand. Konturintervallet er 2 mm.

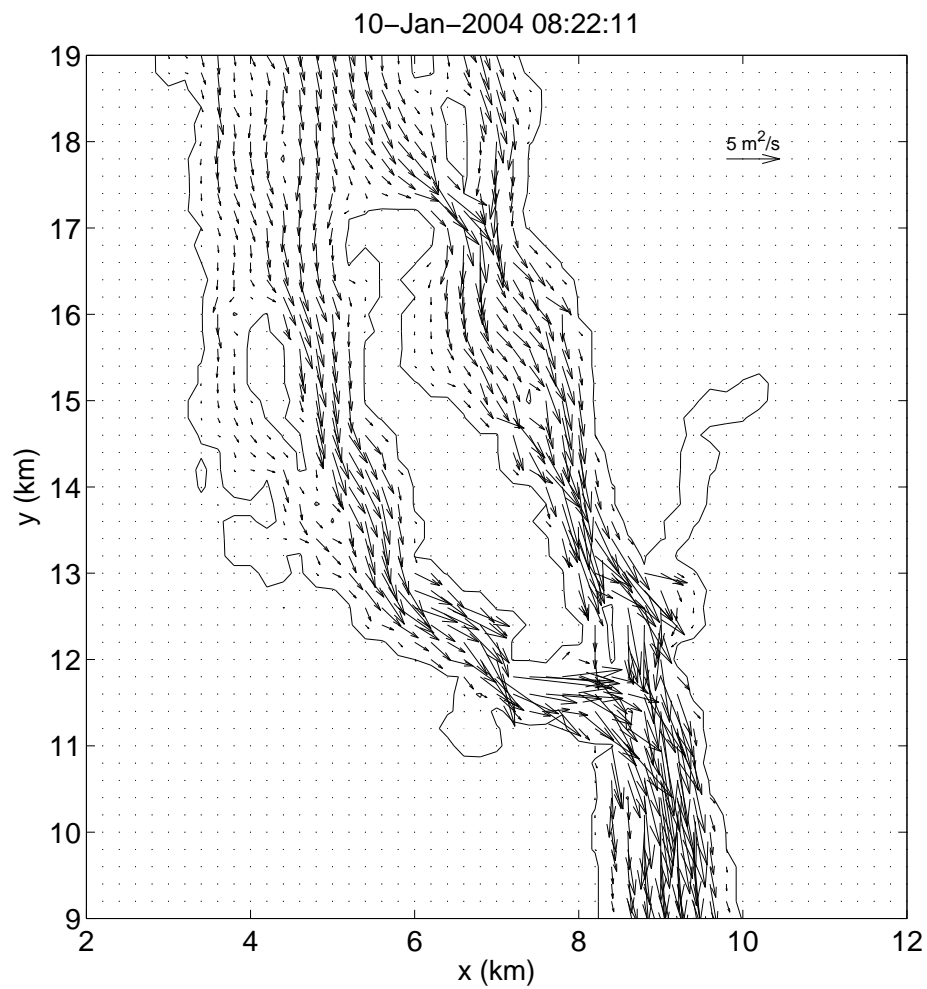




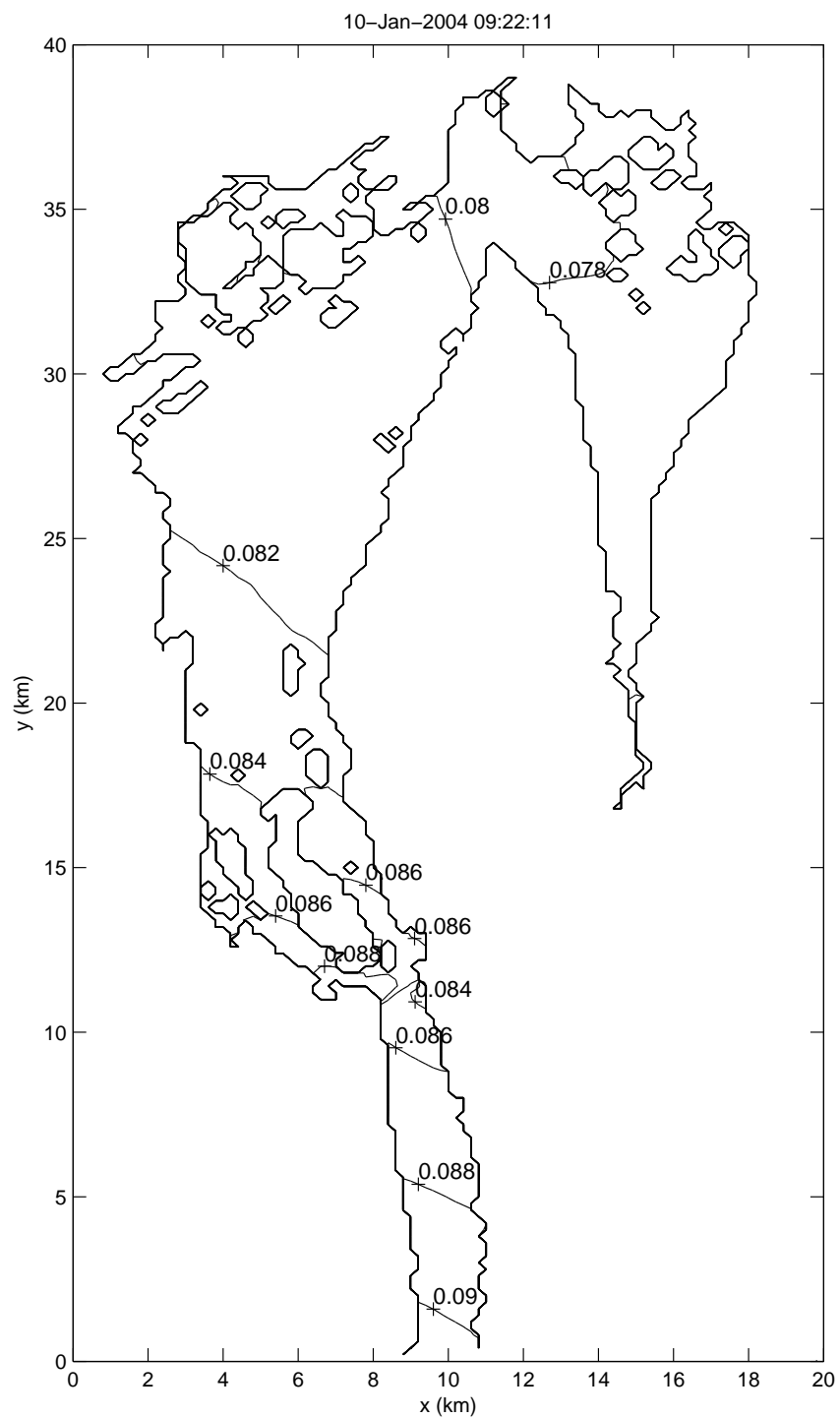
Figur D.16: Volumfluks i Drøbaksundet. Benevningen er  $\text{m}^2/\text{s}$ . For å få den dybdeintegrerte strømhastigheten i  $\text{m}/\text{s}$  må det deles på vannedybden.



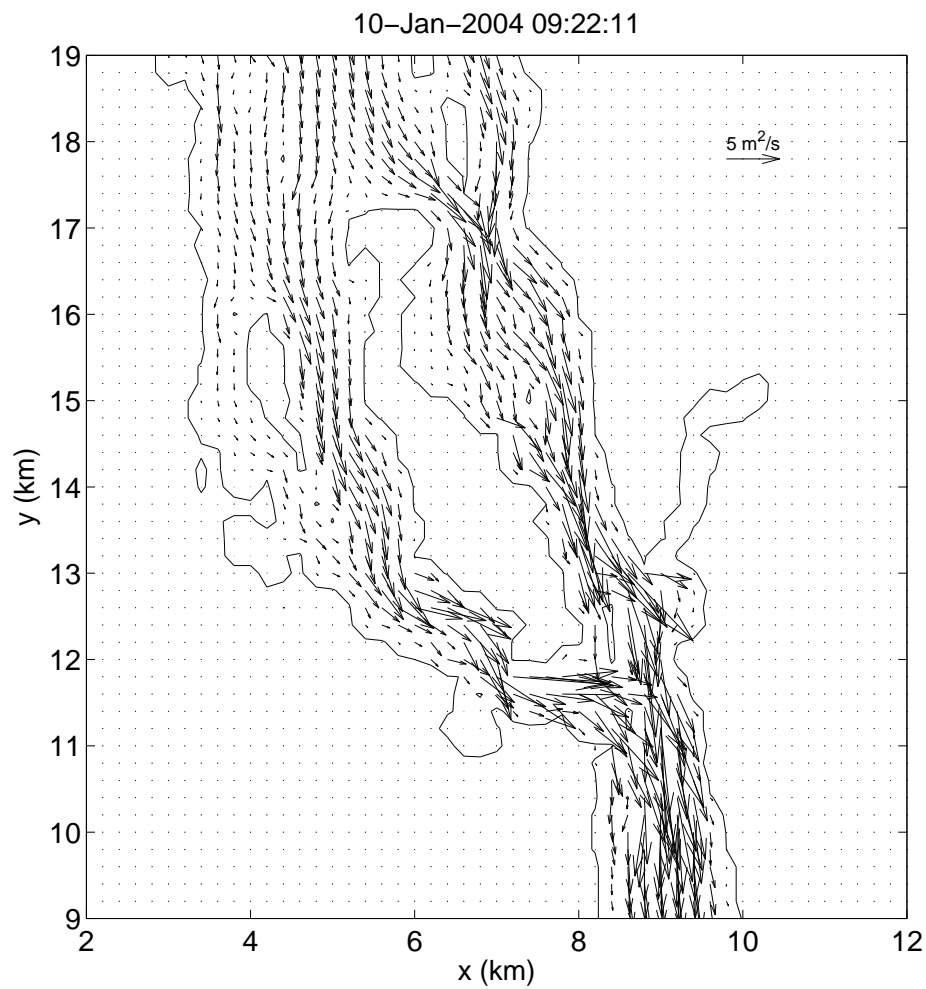
Figur D.17: Vannstanden i Indre Fjord oppgitt i meter. Referansenivået er middelvannstand. Konturintervallet er 2 mm.



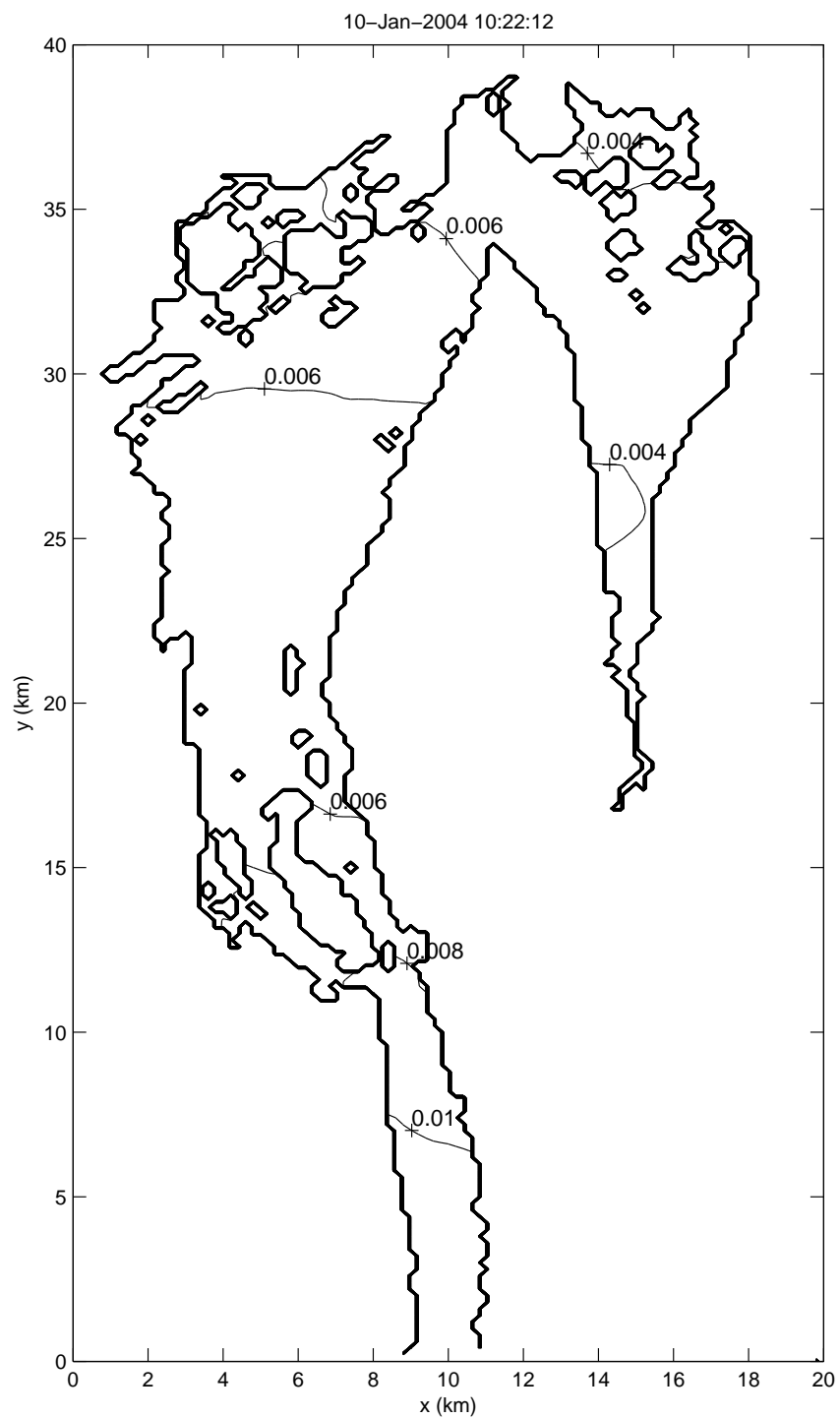
Figur D.18: Volumfluks i Drøbaksundet. Benevningen er  $\text{m}^2/\text{s}$ . For å få den dybdeintegrerte strømhastigheten i  $\text{m}/\text{s}$  må det deles på vann dybden.



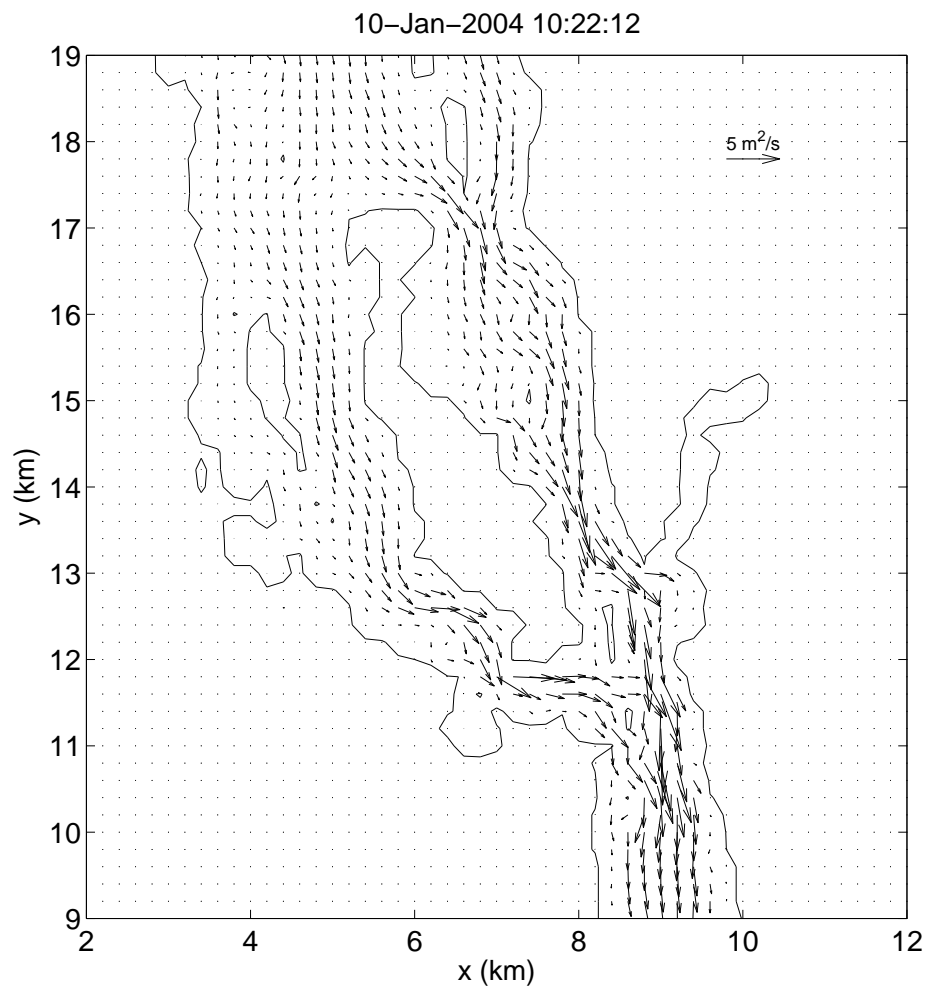
Figur D.19: Vannstanden i Indre Fjord oppgitt i meter. Referansenivået er middelvannstand. Konturintervallet er 2 mm.



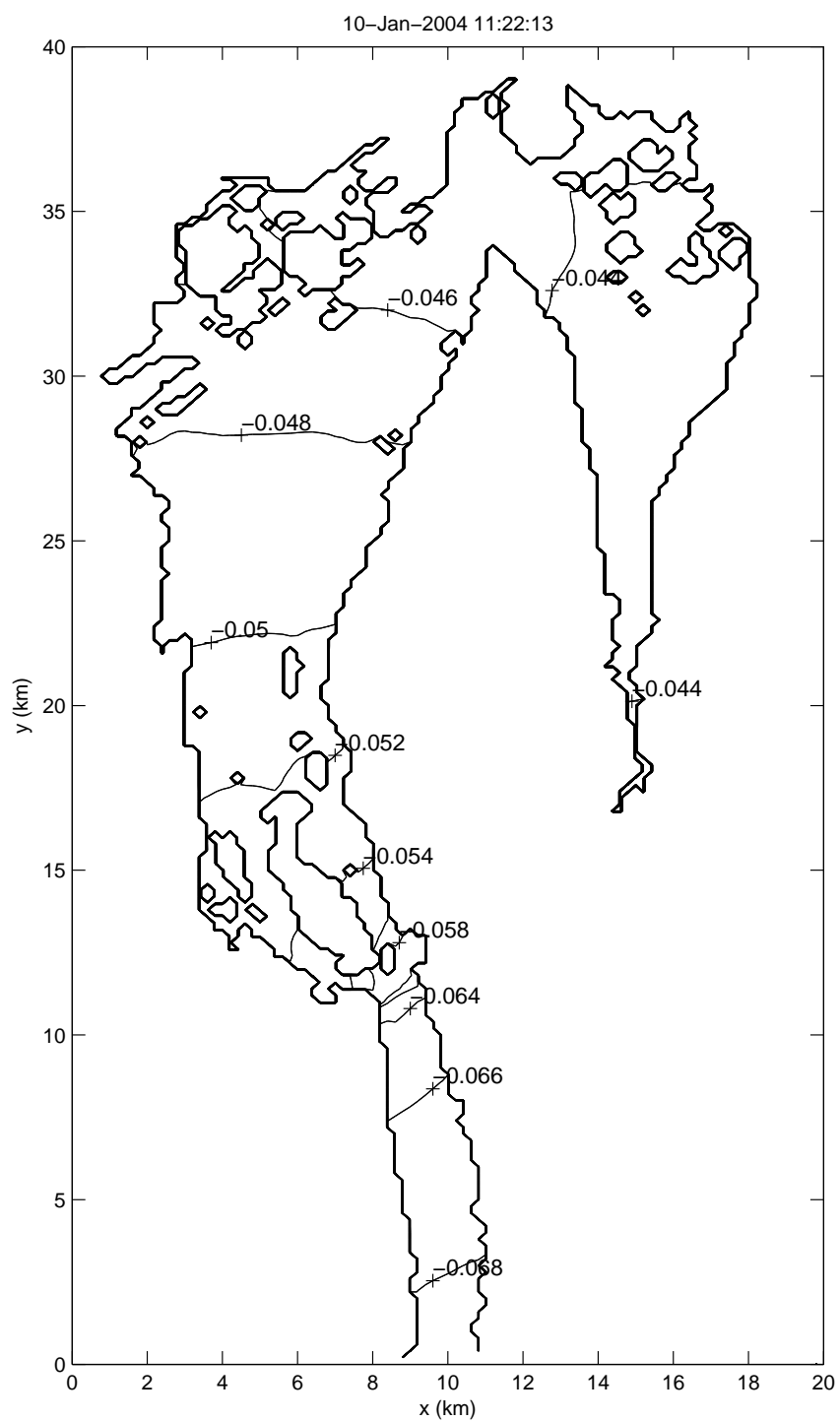
Figur D.20: Volumfluks i Drøbaksundet. Benevningen er  $\text{m}^2/\text{s}$ . For å få den dybdeintegrerte strømhastigheten i  $\text{m}/\text{s}$  må det deles på vannedybden.



Figur D.21: Vannstanden i Indre Fjord oppgitt i meter. Referansenivået er middelvannstand. Konturintervallet er 2 mm.

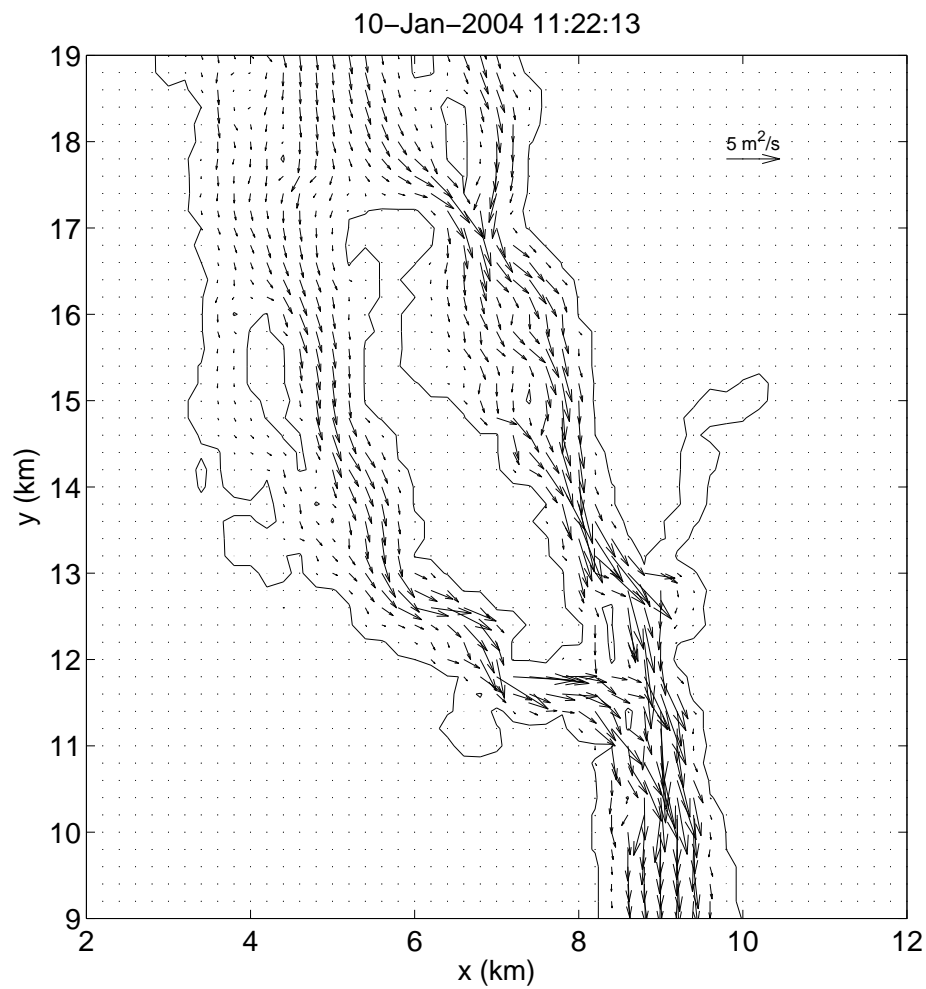


Figur D.22: Volumfluks i Drøbaksundet. Benevningen er  $\text{m}^2/\text{s}$ . For å få den dybdeintegrerte strømhastigheten i  $\text{m}/\text{s}$  må det deles på vannedybden.

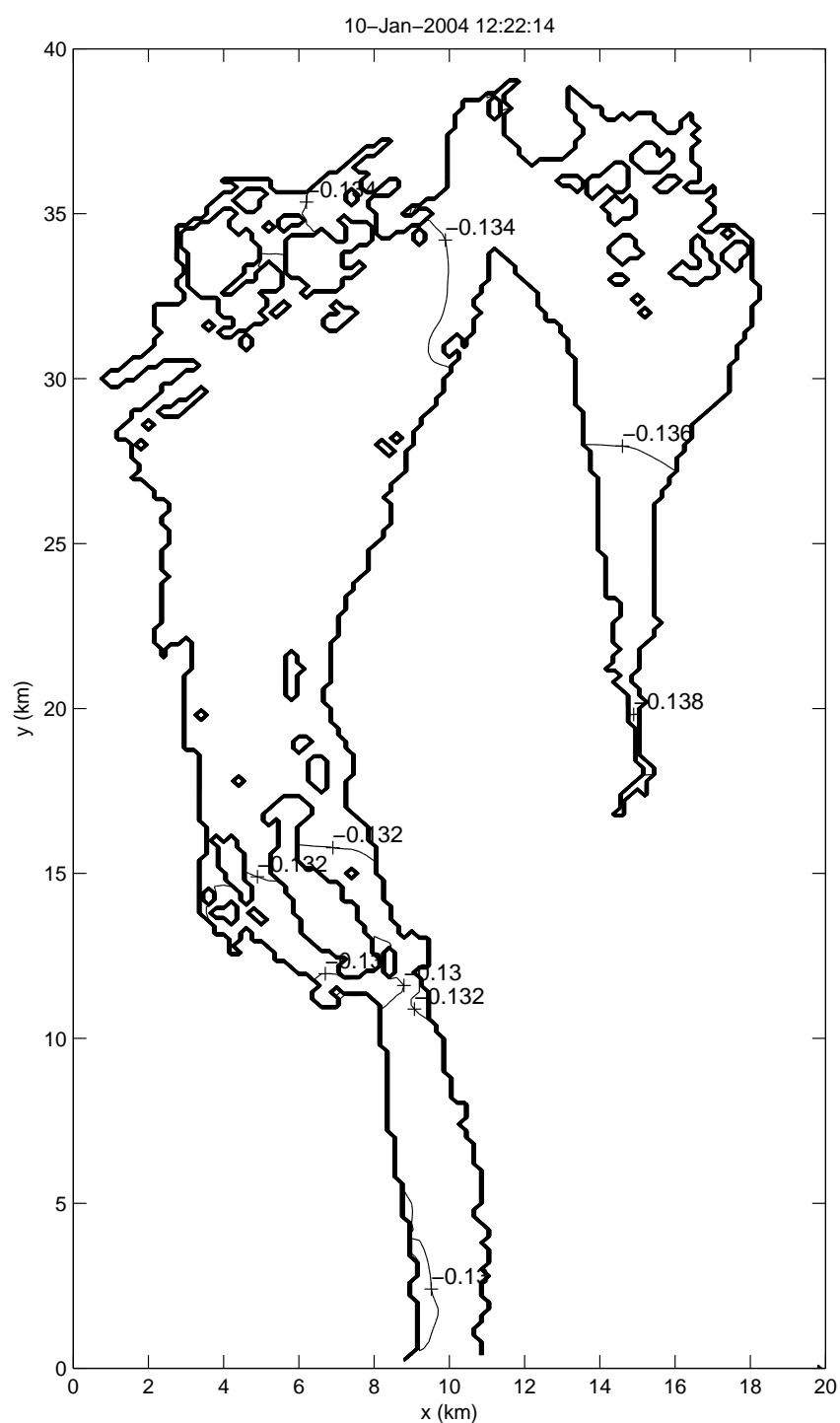


Figur D.23: Vannstanden i Indre Fjord oppgitt i meter. Referansenivået er middelvannstand. Konturintervallet er 2 mm.

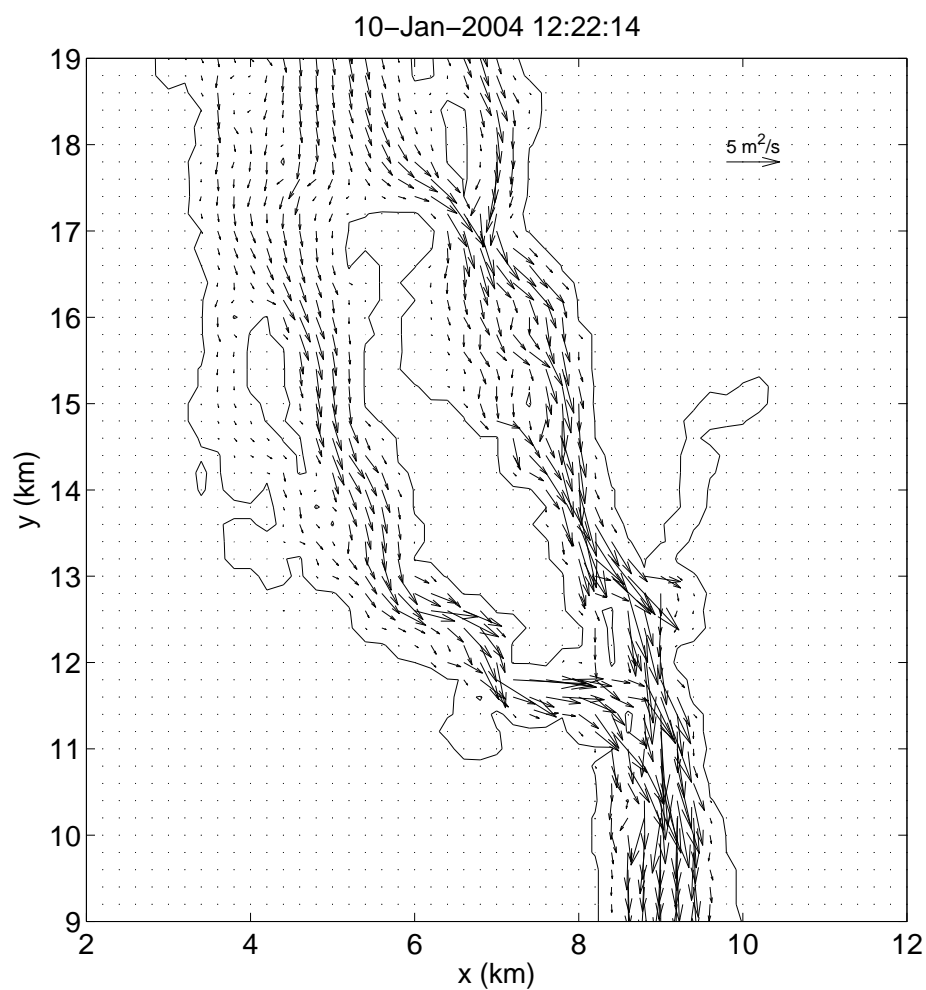




Figur D.24: Volumfluks i Drøbaksundet. Benevningen er  $\text{m}^2/\text{s}$ . For å få den dybdeintegrerte strømhastigheten i  $\text{m}/\text{s}$  må det deles på vann dybden.



Figur D.25: Vannstanden i Indre Fjord oppgitt i meter. Referansenivået er middelvannstand. Konturintervallet er 2 mm.



Figur D.26: Volumfluks i Drøbaksundet. Benevningen er  $\text{m}^2/\text{s}$ . For å få den dybdeintegrerte strømhastigheten i  $\text{m}/\text{s}$  må det deles på vann dybden.



# Bibliografi

- Aas, E. (1983) *Estuarer*. Inst. for geofysikk, Universitetet i Oslo.
- Aas, E. (1986) *Metoder i fysisk oseanografi*. Inst. for geofysikk, Universitetet i Oslo.
- Aas, E. og Endresen, Ø. (1999) *Accuracy of simplified transport estimations in narrow sea straits*. Deutsche Hydrographische Zeitschrift, Volume 51, Number 4, 441-451.
- Bye, J.A.T. og Wolff, J. (2004) *Prediction of the drag law for air-sea momentum exchange*. Ocean Dynamics 54, 577-580.
- Dingman, S. Lawrence (1993) *Physical hydrology*. University of New Hampshire.
- Endresen, Ø. (1995) *Strømmålinger i Drøbaksundet, Hovedoppgave*. Inst. for geofysikk, Universitetet i Oslo.
- Gade, H. G. (1963a) *Hydrografi, Delrapport nr 2*. Geofysisk institutt, Universitetet i Bergen.
- Gade, H. G. (1963b) *Some hydrographic observations of the inner Oslofjord during 1959*. Hvalrådets skrifter.
- Jensen, E. (1977) *Tidevannet i Oslofjorden og hydrografi i Drøbaksundet juni/juli 1972, Hovedoppgave*. Inst. for geofysikk, Universitetet i Oslo.
- Johannesen, O. M. (1963) *Strømundersøkelser i Drøbaksundet, Delrapport nr. 19*. Geofysisk institutt, Universitetet i Bergen.
- Moe, H.; Ommundsen, A. og Gjevik, B. (2002) *A high resolution tidal model for the area around The Lofoten Island, northern Norway*. Continental Shelf Research 22, 485-504.
- Munthe-Kaas, H. (1968) *Materialbalansen, Delrapport nr 14*. Oslofjordprosjektet NIVA.
- Pawlowicz, R. (2002) *Classical tidal harmonic analysis including error estimates in MATLAB*. Computers and Geosciences 28, 929-937.
- Pond, S. og Pickard, G. L. (1978) *Introductory Dynamic Oceanography*. Institute of Oceanography, University of British Columbia.

- Stigebrandt, A. (2002) *Resistance to Barotropic Tidal Flow in Straits by Baroclinic Wave Drag*. Journal of Physical Oceanography, Volume 29, 191-197.
- Tryggestad, S. (1974) *En undersøkelse av strømforholdene ved Brenntangen og tidevannet i Oslofjorden, Hovedoppgave*. Inst. for geofysikk, Universitetet i Oslo.
- Wold, T. (2002) *Vassdrag i Oslo, Årsrapport 2002*. Oslo kommune, Vann- og avløpsetaten.